

**ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Северо-Западный заочный Политехнический Институт

И.И.Мегрецкая, Д.А.Дравских

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ЦЕПИ

Текст лекций

Санкт-Петербург
1998

УДК 621.37 27

И.И.Мегрецкая, Д.А.Дравских. Основы теории цепей. Колебательные цепи: Текст лекций. СПб.: СЗПИ,1998,-60с., ил.19, библиогр.4.

Лекции предназначены для студентов второго и третьего курсов. Они охватывают разделы курса «Основы теории цепей», в которых излагаются колебательные цепи.

Лекции содержат последовательное изложение этих разделов.

В отличие от имеющейся учебной литературы материал по связанным колебательным контурам излагается достаточно подробно и математически строго, в доступной форме и является логическим продолжением разделов по одиночным колебательным контурам, что весьма полезно для студентов, занимающихся без отрыва от производства.

Компоновка и изложение материала не традиционны. Они соответствуют современному уровню. В лекциях приводятся задачи и вопросы для самопроверки.

Рецензенты:

кафедра теоретических основ радиотехники и радиолокации СЗПИ (зав. кафедрой – д-р техн. наук, проф. В.И.Маккавеев);

Н.А.Есепкина - заслуженный деятель науки и техники РФ, д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры радиофизики СПГТУ.

ЛЕКЦИЯ 1

Свободные колебания в одиночном контуре

1.1 Введение. Принцип частотной избирательности.

Основной задачей радиотехнических цепей является неискаженная передача информации. К потере информации могут приводить различные причины, в том числе отличие характеристик частотно-избирательной цепи от идеальных. Назначением такой цепи является выделение сигналов в заданной полосе частот и подавление сигналов, лежащих вне этой полосы. Такая постановка задачи обусловлена тем, что любой сложный сигнал может быть представлен суммой гармонических составляющих, частоты которых лежат в некотором интервале $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$. Амплитудно-фазовые соотношения между составляющими определяются видом сигнала.

Идеальные частотно-избирательные цепи должны обеспечивать постоянную для всех частот в полосе $\Delta\omega$ передачу амплитуд составляющих сигнала и сохранять фазовые соотношения между составляющими сигнала в этой полосе.

Идеальная амплитудно-частотная характеристика должна иметь П-образную форму в диапазоне частот $\Delta\omega$ (рис.1,а).

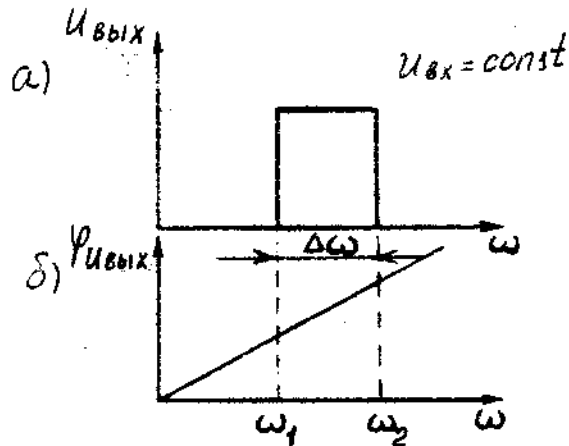


Рис 1

Покажем, что линейная фазовая характеристика (рис.1,б) удовлетворяет условию неискаженной передачи фазовых соотношений между составляющими сигнала.

Пусть фазовая характеристика $\varphi(\omega)$ прямо пропорциональна частоте

$$\varphi(\omega) = A\omega. \quad (1.1)$$

В этой формуле коэффициент A имеет размерность времени и представляет собой время запаздывания любой гармонической составляющей сигнала на выходе цепи по сравнению с ее входом. Составляющие сигнала различной частоты получают разные фазовые набеги, при этом время распространения будет для всех одинаково. При линейной фазовой характеристике гармонические составляющие сигнала поступают на выход цепи одновременно и суммируются так же, как на входе, т.е. сигнал не искажается.

В радиотехнической терминологии способность неискаженной передачи информации определяется фильтрующими свойствами цепи. Качество фильтрации определяется тем, насколько амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики близки к идеальным. Анализ этих характеристик является главной задачей исследования свойств частотно-избирательных цепей.

Характеристики реальных радиотехнических цепей отличаются от идеальных, рассмотренных выше. Задача настоящего учебного пособия - анализ частотно-избирательных свойств простейших (одиночных и связанных) контуров, которые являются неотъемлемой частью радиотехнических цепей.

Для конструирования радиотехнических цепей необходимо знать наиболее общие свойства контуров, которые не зависят от формы подаваемого на вход цепи сигнала. Для этого требуется выяснить, каковы процессы свободных колебаний, которые возникают в контуре, если ему сообщить некоторый запас энергии. В математике функции, описывающие процессы в таком контуре, называют собственными функциями.

1.1. Свободные колебания в одиночном контуре и их связь с собственными функциями колебательной системы

Режим свободных колебаний контура можно рассмотреть на примере схемы рис.2.

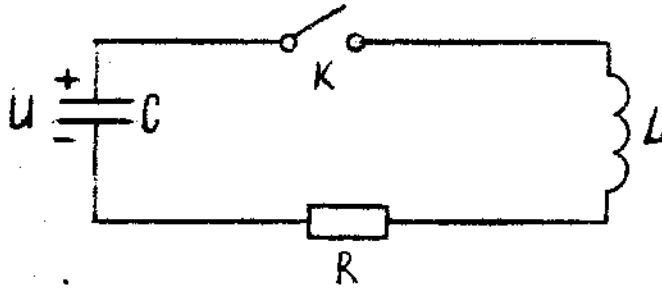


Рис 2

Емкость в схеме заряжена до некоторого напряжения U и после замыкания ключа "К" она разряжается.

По второму закону Кирхгофа составим уравнение баланса падения напряжений на элементах замкнутой схемы в виде

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = 0 . \quad (1.2)$$

Правая часть уравнения (1.2) равна нулю потому, что источники (активные элементы) в схеме отсутствуют. Дополним это интегродифференциальное уравнение начальными условиями в момент замыкания ключа "К" при $t = 0$.

$$i = 0 ,$$

$$U = L \frac{di}{dt} . \quad (1.3)$$

Продифференцируем уравнение (1.2) по времени и поделим обе его части на L . Тогда получим

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + (R/L) \frac{di}{dt} + 1/(LC) i = 0 . \quad (1.4)$$

Введем обозначения

$$\delta = R/(2L) ; \quad \omega_0^2 = 1/(LC) .$$

С их учетом уравнение (1.4) примет вид:

$$d^2i/dt^2 + 2\delta di/dt + \omega_0^2 i = 0 . \quad (1.5)$$

Вид уравнения (1.5) сохраняется для напряжения на емкости u_C и заряда q . В этом легко убедиться, если подставить в (1.5) соотношения

$$i = dq/dt = C du_C /dt . \quad (1.6)$$

Из математики известно, что решение однородного дифференциального уравнения следует искать в виде

$$i = Ae^{mt} . \quad (1.7)$$

Значение величины m определяется из характеристического уравнения, получаемого подстановкой (1.7) в (1.5) и сокращением обеих частей полученного уравнения на величину Ae^{mt} ,

$$m^2 + 2\delta m + \omega_0^2 = 0 .$$

Решая характеристическое уравнение, получим

$$m_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm \kappa , \quad (1.8)$$

где $\kappa = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$.

С учетом (1.8) формула (1.7) запишется в виде

$$i = Ae^{m_1 t} + Be^{m_2 t} . \quad (1.9)$$

Определим значения A и B из начальных условий (1.3) путем подстановки (1.9) в каждое из уравнений (1.3). Тогда получим, что при $t=0$

$$A = -B; \quad di/dt|_{t=0} = U/L = (A - B)\kappa ,$$

т.е.

$$A = -B = U/(2\kappa L) . \quad (1.10)$$

С учетом соотношений (1.10) и (1.9) запишем окончательно решение уравнения (1.5) в виде

$$i = [U/(2\kappa L)] e^{-\delta t} (e^{\kappa t} - e^{-\kappa t}) = U/(\kappa L) e^{-\delta t} \operatorname{sh} \kappa t. \quad (1.11)$$

Общее решение (1.11) позволяет описать две качественно различные формы свободного колебания в RLC контуре. Это апериодический процесс при $\delta \geq \omega_0$ (или $R \geq 2\sqrt{L/C}$) и колебательный процесс при $\delta < \omega_0$ (или $R < 2\sqrt{L/C}$).

Апериодический режим разряда емкости в контуре характеризуется единственным максимальным значением тока. Определим это значение тока для предельного случая $\delta \approx \omega_0$, или $\kappa \rightarrow 0$. Известно, что при $\kappa \rightarrow 0$ величина $\operatorname{sh} \kappa t \rightarrow \kappa t$. Формула (1.11) в этом случае имеет вид

$$i = (U/L) t e^{-\delta t}. \quad (1.12)$$

Для определения экстремума тока продифференцируем соотношение (1.12) и приравняем его производную нулю

$$di/dt = (U/L) e^{-\delta t} (1 - \delta t) = 0.$$

Отсюда

$$t_m = 1/\delta.$$

Экстремальное значение тока достигается в режиме апериодического разряда емкости в момент $t_m = 1/\delta$ и равно

$$i_m = (U/L) t_m e^{-\delta t_m} = U/(\delta L) e^{-1} = 0.736 U/R. \quad (1.13)$$

Наибольший интерес для радиотехники представляет периодический (колебательный) режим разряда емкости, который соответствует условию

$$\omega_0 > \delta, \text{ т.е.}$$

$$\kappa = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = j\omega.$$

При подстановке этого соотношения в (1.11) имеем

$$i = U/(\omega L)e^{-\delta t} \sin \omega t \quad (1.14)$$

Общий вид графика нормированного значения тока, построенного по формуле (1.14) приведен на рис.3.

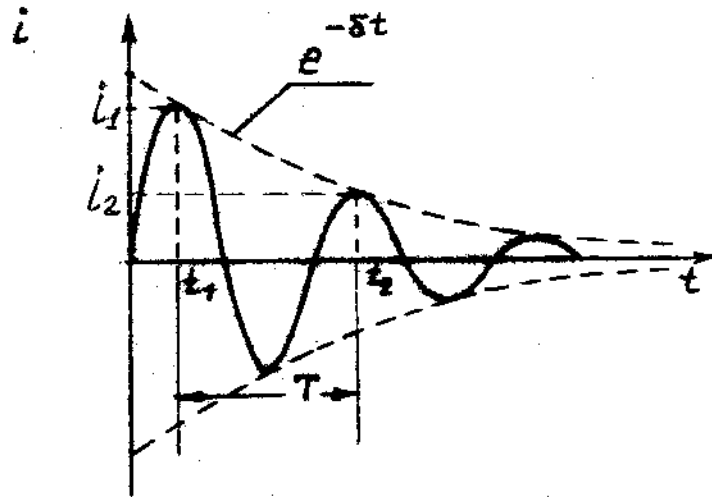


Рис 3

Согласно (1.2) $u_c = -L di/dt - Ri$. Подставив сюда первое равенство (1.11), можно получить напряжение на емкости при $\delta < \omega_0$

$$u_c = (\omega_0/\omega)Ue^{-\delta t} \sin(\omega t + \psi) \quad (1.15)$$

Определим значение фазового сдвига ψ , исходя из начального условия в виде

$$i|_{t=0} = C du_c/dt.$$

После дифференцирования (1.15) и умножения на C имеем $\omega \cos \psi - \delta \sin \psi = 0$,
отсюда

$$\operatorname{tg} \psi = \omega / \delta.$$

Формула (1.15) соответствует условию $\delta < \omega_0$. При $\delta / \omega_0 \rightarrow 0$ величина $\psi \rightarrow \pi/2$, тогда

$$u_c \rightarrow U e^{-\delta t} \cos \omega t. \quad (1.16)$$

Оценим значение частоты колебательного процесса. Согласно обозначению

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - (\delta / \omega_0)^2} = \omega_0 \sqrt{1 - R^2 C / (4L)}.$$

При условии $R^2 C / (4L) \ll 1$ можно разложить радикал в ряд и ограничиться первыми двумя членами разложения. Тогда соотношение для ω можно записать в виде

$$\omega = \omega_0 [1 - R^2 C / (8L)]. \quad (1.17)$$

Преобразовав выражение (1.17), получим

$$|(\omega - \omega_0) / \omega_0| = R^2 C / (8L).$$

Из этой формулы видно, что если $R \leq \sqrt{L/C}$, то погрешность в определении частоты колебательного процесса разряда $\omega = \omega_0$ не превышает 12,5%. Примем $\omega = \omega_0$, тогда

$$\operatorname{tg} \psi = \omega_0 / \delta = 2\omega_0 L / R. \quad (1.18)$$

Определим практически важные характеристики колебательного процесса разряда емкости в контуре, связанные с затуханием (убыванием) амплитуды этого колебания во времени. Выразим отношение i_1 / i_2 (рис.3), используя (1.14). Получим

$$i_1 / i_2 = e^{-\delta t_1} / (e^{-\delta t_1} e^{-\delta T}) = e^{\delta T} = \Delta. \quad (1.19)$$

Параметр Δ называют декрементом затухания. Используют также величину логарифмического декремента затухания

$$V = \ln \Delta = \delta T. \quad (1.20)$$

Она означает относительное убывание амплитуды за период T свободных колебаний.

При условии $\delta T \ll 1$ получим

$$(i_1 - i_2)/i_1 = (e^{-\delta t_1} - e^{-\delta t_1} e^{-\delta T})/e^{-\delta t_1} = 1 - e^{-\delta T} \approx 1 - 1 + \delta T = \delta T = V.$$

В этом соотношении слагаемое $e^{-\delta T}$ разложено в степенной ряд, ограниченный двумя первыми членами.

Логарифмический декремент затухания связан с другими параметрами контура. Используя формулу Томпсона для периода свободных колебаний $T \approx 2\pi\sqrt{LC}$ и соотношение $\operatorname{tg}\psi = 1/\cos\psi$ для больших ψ запишем цепочку равенств в виде

$$\begin{aligned} V = \delta T &= [R/(2L)]2\pi\sqrt{LC} = \pi R / \sqrt{L/C} = \pi R / \rho = 2\pi\delta / \omega \cong 2\pi\delta / \omega_0 = \\ &= 2\pi / \operatorname{tg}\psi \cong 2\pi \cos\psi. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Здесь введено обозначение

$$\rho = \sqrt{L/C}. \quad (1.22)$$

Величина ρ называется характеристическим сопротивлением контура. Введем параметр затухания

$$d = V/\pi = R/\rho. \quad (1.23)$$

Величина, обратная затуханию, называется добротностью Q . Используя обозначения $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ и $\rho = \sqrt{L/C}$, запишем

$$Q = \rho / R = \omega_0 L / R. \quad (1.24)$$

Величина Q определяет время установления свободных колебаний в колебательном контуре. Согласно рис.3 интервал времени τ , за который амплитуда колебания уменьшается в e раз, составляет

$$\tau = 1/\delta = 2L/R. \quad (1.25)$$

τ называют постоянной времени цепи [1].

На основании формулы (1.24) и используя обозначение $\delta = R/(2L)$, запишем

$$Q = \omega_0 L/R = 2 \pi L/(RT) = \pi /(\delta T) = \pi /V . \quad (1.26)$$

Из формул (1.25), (1.26) получим

$$Q = \pi \tau /T . \quad (1.27)$$

С ростом постоянной времени τ добротность цепи возрастает.

Таким образом, рассмотрены динамические свойства контура в режиме свободных колебаний.

Для определения собственных функций контура в соответствии с требованиями математики необходимо решить уравнение вида

$$L di/dt + Ri + 1/C \int i dt = v_i . \quad (1.28)$$

Если при записи левой части уравнения (1.28) опустить функцию i , то получится линейный оператор $\mathbb{E}$. Выражение (1.28) можно переписать в виде

$$\mathbb{E} i = v_i .$$

Запись $\mathbb{E} i$ означает воздействие оператора $\mathbb{E}$ на функцию i . При этом функцию i называют собственной функцией линейного оператора, а v - собственным значением того же оператора.

Перенесем правую часть уравнения (1.28) в левую с обратным знаком, поделим полученное однородное уравнение на L . После повторного дифференцирования получим

$$d^2 i/dt^2 + [(R - v)/L] di/dt + 1/(LC) i = 0 . \quad (1.29)$$

Требуется решить это уравнение, подобрав величину v таким образом, чтобы функция тока i не зависела от v . При малых значениях коэффициента $(R-v)/L$ решение уравнения (1.29) аналогично (1.14). Для этого случая $\omega \approx \omega_0$. Запишем формально решение (1.29) в виде

$$i \approx [U/(\omega_0 L)] e^{-(R-\nu)t/(2L)} \sin \omega_0 t.$$

Здесь использовано обозначение $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Полученное решение не зависит от ν при $\nu = R$. Тогда собственная функция линейного оператора имеет вид

$$i = I \sin \omega_0 t, \quad (1.30)$$

где $I = U/(\omega_0 L)$, собственное значение $\nu = R$. Собственной функцией рассматриваемого оператора цепи является синусоидальное (или косинусоидальное) колебание. Это означает, что собственные функции тока и функции напряжения на элементах контура изменяются во времени по гармоническому закону.

Вопросы для самопроверки.

1. Составьте уравнение свободных колебаний в одиночном контуре.
2. Запишите условия существования аperiodических и периодических затухающих свободных колебаний в одиночном контуре.
3. Определите частоту свободного колебательного процесса.
4. Определите понятие и раскройте физический смысл декремента затухания и логарифмического декремента затухания.
5. Определите понятие затухания и добротности.
6. Определите понятие собственной функции оператора контура и приведите вид этой функции.

Задача.

Определите число колебаний тока контура за время t_k , когда амплитуда свободных колебаний уменьшилась в 100 раз, а период колебаний равен T .

Решение.

Согласно формуле (1.14) значение амплитуды тока в момент времени

$$t_k = NT \text{ есть}$$

$$i_{mk} = U/(\omega L) e^{-\delta t_k},$$

а в момент $t = 0$ величина тока

$$i_{m0} = U/(\omega L) .$$

Согласно условию задачи

$$0,01U/(\omega L) = U/(\omega L)e^{-\delta t_k} .$$

Тогда

$$t_k = \ln 100/\delta = 4,6/\delta ,$$

а число колебаний составляет

$$N = t_k / T = 4,6/(\delta T) = 4,6/V .$$

ЛЕКЦИЯ 2

Последовательный колебательный контур при гармоническом воздействии

2.1. Резонанс в последовательном колебательном контуре.

Режим вынужденных стационарных колебаний в контуре реализуется в случае воздействия ЭДС на входе контура с напряжением, изменяющимся во времени по синусоидальному (косинусоидальному) закону. В теории цепей такой закон называют гармоническим в соответствии с термином "гармонический осциллятор".

Изучим свойства последовательного контура при гармоническом воздействии. Схема контура показана на рис.4.

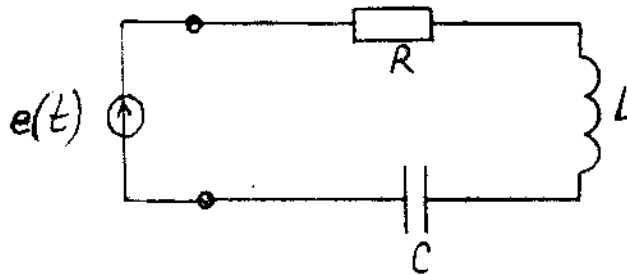


Рис 4

В соответствии с изложенным в лекции 1, интегро-дифференциальное уравнение схемы можно представить в виде

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = e(t), \quad (2.1)$$

причем

$$e(t) = E \cos(\omega t + \psi_E). \quad (2.2)$$

Согласно теории линейных неоднородных дифференциальных уравнений при гармоническом воздействии $e(t)$ частным решением (2.1) для тока $i(t)$ (после окончания переходного процесса) является гармоническая функция, а именно:

$$i(t) = I \cos(\omega t + \psi_i) . \quad (2.3)$$

Решение уравнения (2.1) сводится к определению амплитуды I и начальной фазы ψ_i тока. Решение целесообразно провести символическим методом [2]. Согласно этому методу в выражениях (2.2), (2.3) для линейных цепей производится замена реальных величин токов и напряжений на символические векторы, называемые мгновенными или текущими комплексами

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) &= E e^{j(\omega t + \psi_E)} = \dot{E} e^{j\omega t}, \\ \dot{I}(t) &= I e^{j(\omega t + \psi_i)} = \dot{I} e^{j\omega t}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь $\dot{E} = E e^{j\psi_E}$ и $\dot{I} = I e^{j\psi_i}$ - комплексные амплитуды, соответственно ЭДС и тока. Вещественные функции связаны с комплексными функциями времени линейной зависимостью

$$\begin{aligned} e(t) &= \operatorname{Re}[\dot{E}(t)]; \\ i(t) &= \operatorname{Re}[\dot{I}(t)]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

После подстановки значений (2.4) в уравнение (2.1) и сокращения левой и правой части на $e^{j\omega t}$, получим

$$\dot{I} \{R + j[\omega L - 1/(\omega C)]\} = \dot{E} . \quad (2.6)$$

Из уравнения (2.6) очевидно, что отношение

$$\dot{E} / \dot{I} = Z = R + j[\omega L - 1/(\omega C)] \quad (2.7)$$

соответствует закону Ома в символической форме, а величина Z является комплексным сопротивлением рассматриваемого контура. Соотношения (2.6) и (2.7) указывают на наличие частотной зависимости. Существует частота, на которой входное реактивное сопротивление контура равняется нулю. Эта частота называется резонансной. Условием резонанса в контуре является соотношение

$$X = \omega_p L - 1/(\omega_p C) = 0, \quad \omega_p L = 1/(\omega_p C) = \rho. \quad (2.8)$$

Отсюда

$$\omega_p = 1/\sqrt{LC}. \quad (2.9)$$

Значение резонансной частоты ω_p совпадает с собственной частотой контура. Рассмотрим некоторые соотношения для тока и напряжения на элементах контура при резонансе. Для этого перепишем уравнение (2.6) в виде

$$\dot{E} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C.$$

Здесь

$$\dot{U}_R = \dot{I} R; \quad \dot{U}_L = \dot{I} j\omega L; \quad \dot{U}_C = \dot{I} / (j\omega C) \quad (2.10)$$

комплексные амплитуды падения напряжения соответственно на сопротивлении $\dot{U}_R$, индуктивности $\dot{U}_L$ и емкости $\dot{U}_C$.

На резонансной частоте сопротивление $Z = R$ является активной величиной, поэтому амплитуда тока при резонансе равна $I_p = E/R$, а фаза тока совпадает с фазой внешнего воздействия.

$$\dot{I} = \dot{E} / Z; \quad I e^{j\psi_i} = E e^{j\psi_E} / (z e^{j\varphi_z}); \quad I = E/z; \quad \psi_i = \psi_E - \varphi_z; \quad (2.11)$$

$$\psi_{ip} = \psi_E.$$

$$\text{Здесь } z = |Z|.$$

Комплексные амплитуды напряжений на резонансной частоте с учетом (2.10) есть

$$\dot{U}_{Rp} = \dot{I}_p R = (E/R) e^{j\psi_E} R = \dot{E};$$

$$\dot{U}_{Lp} = \dot{I}_p j\omega_p L = (E/R) \omega_p L e^{j\psi_E} e^{j\pi/2} = \dot{E} Q e^{j\pi/2};$$

$$\dot{U}_{Cp} = \dot{I}_p \{-j[1/(\omega_p C)]\} = (E/R)1/(\omega_p C) e^{j\psi_E} e^{-j\pi/2} = \dot{E}Qe^{-j\pi/2}. \quad (2.12)$$

Из соотношений (2.12) видно, что амплитуда напряжений на реактивных элементах контура при резонансе возрастает в Q раз по сравнению с амплитудой напряжения источника ЭДС. Это явление называется резонансом напряжений или последовательным резонансом. Оно присуще лишь последовательному колебательному контуру.

Форма колебаний тока и напряжения u_{Cp} может быть определена на основании (2.5)

$$i_p = (E/R)\cos(\omega t + \psi_E) = I_p \cos(\omega t + \psi_E);$$

$$u_{Cp} = EQ\cos(\omega t + \psi_E - \pi/2) = I_p \rho \sin(\omega t + \psi_E). \quad (2.13)$$

2.2. Энергетические соотношения в последовательном колебательном контуре при резонансе

Используя формулы (2.13), выразим энергию, запасаемую в реактивных элементах контура на резонансе

$$W_{Lp} = Li_p^2 / 2 = (LI_p^2 / 2) \cos^2(\omega t + \psi_E);$$

$$W_{Cp} = Cu_{Cp}^2 / 2 = (C\rho^2 I_p^2 / 2) \sin^2(\omega t + \psi_E) =$$

$$= [I_p^2 / (2\omega_p^2 C)] \sin^2(\omega t + \psi_E) = (LI_p^2 / 2) \sin^2(\omega t + \psi_E). \quad (2.14)$$

Функция $\cos^2(\omega t + \psi_E)$ достигает максимального значения в моменты времени, когда функция $\sin^2(\omega t + \psi_E)$ равна нулю и $\cos^2(\omega t + \psi_E)$ имеет нулевое значение в моменты времени, когда функция $\sin^2(\omega t + \psi_E)$ максимальна. Это дает основание утверждать, что емкостной и индуктивный элементы в контуре при резонансе обмениваются запасенной энергией так, что в каждый момент времени суммарная энергия, запасенная в реактивных элементах,

$$W_p = W_{Lp} + W_{Cp} = LI_p^2 / 2. \quad (2.15)$$

Выразим среднюю энергию потерь за период времени $T = 2\pi/\omega_p$, рассеиваемую на активном сопротивлении,

$$W_R(T) = (I_p^2 / 2)RT . \quad (2.16)$$

Интересно отметить, что

$$W_p/W_R(T) = \omega_p L / (R2\pi) = Q / (2\pi) . \quad (2.17)$$

Добротность контура пропорциональна отношению энергии, запасенной в реактивных элементах контура при резонансе, к средней энергии потерь за период колебаний с частотой ω_p .

Из (2.17) следует, что

$$Q = \rho / R . \quad (2.18)$$

Здесь R - сопротивление потерь, включенное последовательно с реактивным сопротивлением контура.

2.3. Частотные свойства входного сопротивления и тока контура

Рассмотрим частотные свойства одиночного последовательного колебательного контура. Они определяются частотной зависимостью комплексного сопротивления контура. Используя формулы (2.7), (2.8), представим комплексное сопротивление контура в виде

$$Z = R(1 + jX/R) = ze^{j\varphi_z} . \quad (2.19)$$

Введем понятие "обобщенная расстройка", определяемое как

$$a = X/R = [\omega L - 1/(\omega C)]/R = (\omega_p L/R)/(\omega/\omega_p - \omega_p/\omega) . \quad (2.20)$$

В радиотехнической практике обычно интересуются частотами вблизи резонанса, т.е. $\omega \cong \omega_p$; $\Delta\omega = |\omega - \omega_p| \ll \omega_p$;

$$a \cong (\rho / R)[(\omega^2 - \omega_p^2)/(\omega\omega_p)] \cong (\rho / R)(\omega^2/\omega_p^2 - 1) .$$

Для таких частот

$$a \cong (\rho / R)[\omega^2 - (\omega \pm \Delta\omega)^2] / \omega_p^2 \cong \pm 2Q\Delta\omega/\omega_p . \quad (2.21)$$

На основании формулы (2.19) и обозначения (2.20) запишем выражение для модуля и аргумента комплексного сопротивления последовательного колебательного контура в виде (рис.5)

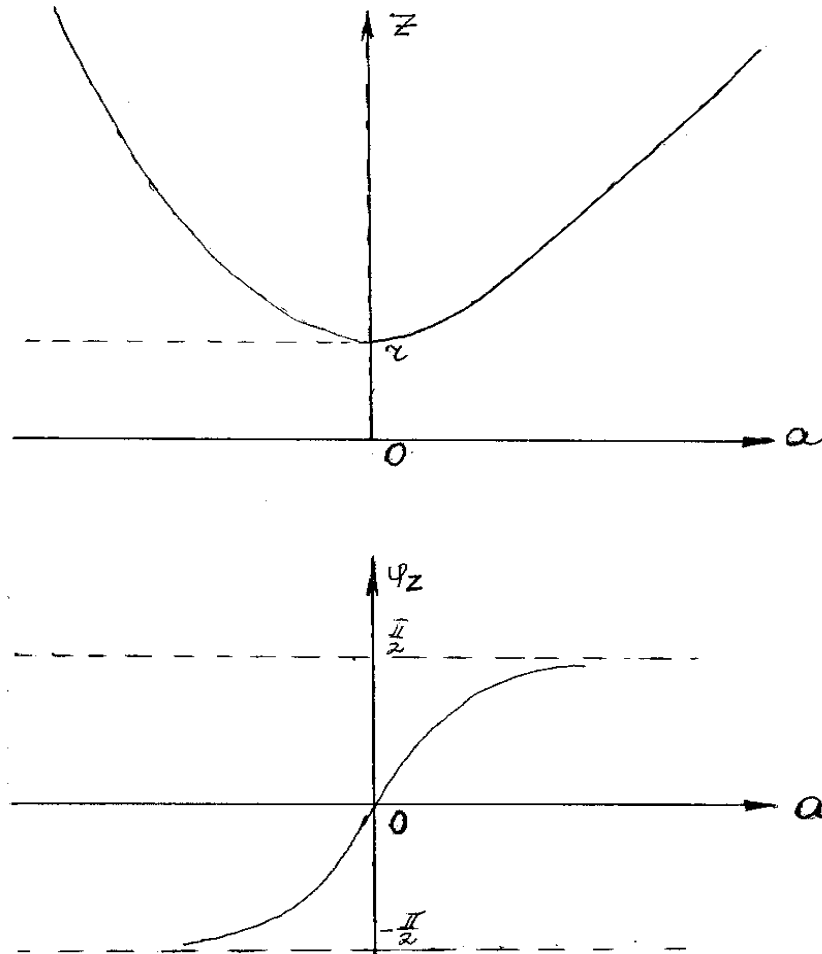


рис 5

$$z = R \sqrt{1+a^2} ;$$

$$\varphi_z = \arctg a . \quad (2.22)$$

Комплексная амплитуда тока зависит от частоты. Эта зависимость может быть определена из формул (2.11), (2.22) в виде

$$I = [E/(R\sqrt{1+a^2})]e^{j(\psi_E - \arctg a)} . \quad (2.23)$$

Из формулы (2.23) получим нормированное значение амплитуды тока и значение его фазы как функции частоты

$$n = I/I_p = 1/\sqrt{1+a^2}, \quad (2.24)$$

$$\psi_i = \psi_E - \operatorname{arctg} a, \quad (2.25)$$

где $I_p = E/R$. Начальную фазу ЭДС обычно принимают равной нулю.

На рис.6 приведены амплитудно и фазочастотная характеристики тока, построенные по формулам (2.24) и (2.25).

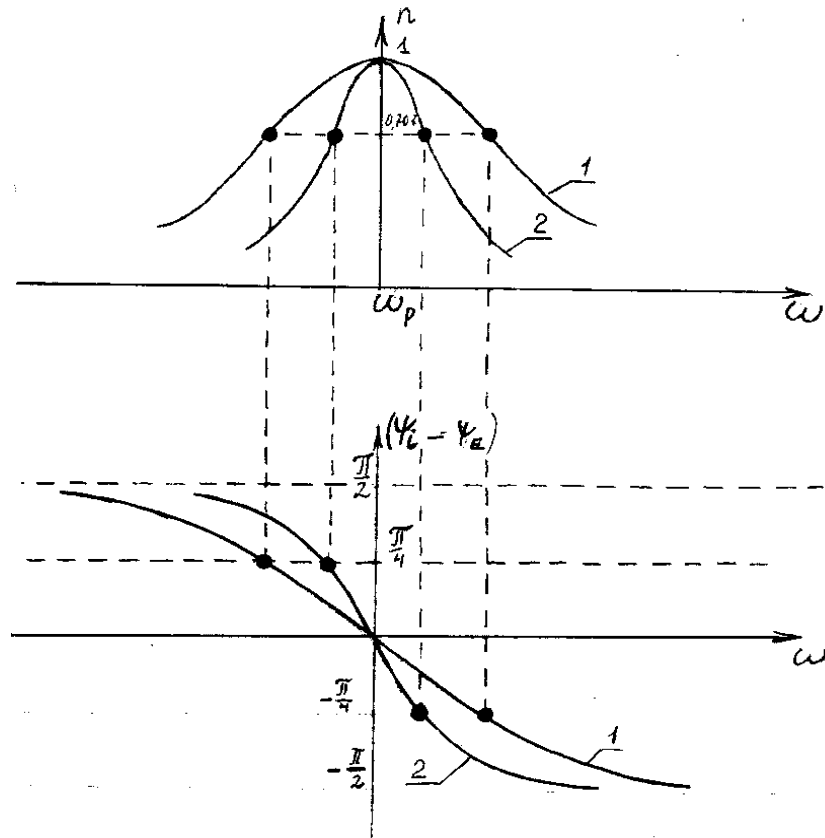


Рис 6

Первая кривая относится к случаю добротности $Q_1 = \rho/R_1$, а вторая - к $Q_2 = \rho/R_2$, где $Q_2 > Q_1$ и $R_1 > R_2$. Отметим ряд особенностей построения графиков. Выражение (2.20) для обобщенной расстройки является точным. Используя (2.20), можно показать, что зависимости n и ψ_i от

частоты не симметричны относительно значения $a = 0$. Однако, по мере увеличения добротности Q для величины “ a ” становится все более справедливым асимптотическое значение (2.21) и указанные характеристики приближаются к симметричным относительно оси ординат, проведенной в точке резонансной частоты.

Между амплитудно-частотными (АЧХ) и фазочастотными (ФЧХ) характеристиками существует взаимосвязь. Согласно рис.6 при $dI/d\omega$ т.е. $dn/d\omega < 0$ величина $\psi_i - \psi_E = -\varphi_z$ отрицательна и, наоборот, при $dI/d\omega$ т.е. $dn/d\omega > 0$ величина ψ_i положительна. Крутизна ФЧХ вблизи резонансной частоты также связана с формой АЧХ и с добротностью. Покажем это, используя формулу (1.26)

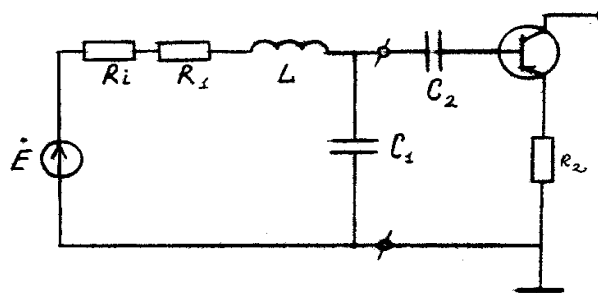
$$a \cong 2Q\Delta\omega / \omega_p = 2(\Delta\omega/\omega_p)(\omega_p L/R) = \Delta\omega/\delta = \Delta\omega\tau .$$

Отсюда $|\varphi_z| = \arctg a \approx \Delta\omega\tau$ при $\Delta\omega \rightarrow 0$. Таким образом, вблизи резонансной частоты угол наклона ФЧХ пропорционален постоянной времени контура, т.е. $d|\varphi_z|/d\omega = \tau$. Это, согласно (1.27), означает, что с ростом добротности крутизна ФЧХ вблизи ω_p увеличивается. Формула $|\varphi_z| \approx \Delta\omega\tau$ позволяет измерять постоянную времени контура τ по величине частотного градиента φ_z вблизи ω_p .

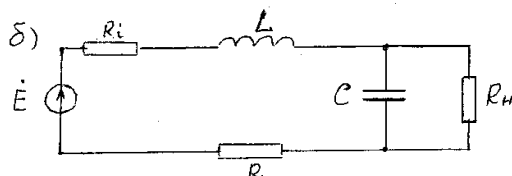
2.4. Частотные характеристики коэффициента передачи последовательного колебательного контура

Зная частотные свойства входного сопротивления контура можно выбрать практическую схему, в которой последовательный контур применяется как избирательное по частоте устройство с задающим генератором (каким-либо датчиком) и входным устройством, например в виде транзисторного усилителя (рис.7а).

а)



б)



в)

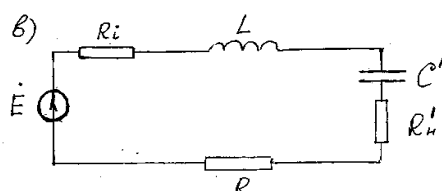


Рис. 7.

Для лучшего использования избирательных свойств последовательного контура желательно, чтобы внутреннее сопротивление источника ЭДС R_i (рис.7а) было близко к нулю (идеальный источник ЭДС имеет нулевое внутреннее сопротивление). Входное сопротивление последовательного контура на резонансе является минимальным. Оно равно сопротивлению потерь R . Активное сопротивление источника увеличивает потери в контуре. При включении контура на вход устройства используется описанный выше эффект резонанса напряжения. Чтобы нагрузка меньше шунтировала контур и не ухудшала его избирательные свойства, связь нагрузки с контуром стараются ослабить. Вход транзисторного каскада следует подсоединить к одному из реактивных элементов, напряжение на которых при резонансе в Q раз превышает напряжение источника.

Эквивалентная схема цепи представлена на рис.7,б. Результаты анализа последовательного контура можно применить к этой схеме, если параллельно соединенные элементы пересчитать в последовательно соединенные (рис.7,в)

$$Z_{\text{пар}} = R_{\text{н}} j X_{\text{пар}} / (R_{\text{н}} + j X_{\text{пар}}) = (X_{\text{пар}}^2 R_{\text{н}} + j R_{\text{н}}^2 X_{\text{пар}}) / (R_{\text{н}}^2 + X_{\text{пар}}^2) = R_{\text{посл}} + j X_{\text{посл}} ,$$

отсюда

$$R_{\text{посл}} = (X_{\text{пар}}^2 R_{\text{н}}) / (R_{\text{н}}^2 + X_{\text{пар}}^2); \quad (2.26)$$

$$X_{\text{посл}} = (R_{\text{н}}^2 X_{\text{пар}}) / (R_{\text{н}}^2 + X_{\text{пар}}^2) . \quad (2.27)$$

Как следует из формулы (2.27) $C' \neq C$ (рис.7,в), следовательно резонансная частота последовательного контура, нагруженного на $R_{\text{н}}$, будет зависеть от сопротивления нагрузки. Обычно выполняется условие $R_{\text{н}} \gg X_{\text{пар}}$. В этом случае при $\omega \approx \omega_p$ вместо (2.26), (2.27) запишем

$$R_{\text{посл}} \approx \rho^2 / R_{\text{н}} , \quad (2.28)$$

$$X_{\text{посл}} \approx X_{\text{пар}} = \rho . \quad (2.29)$$

Свойства контура (рис.7,в) характеризуются величиной эквивалентной добротности

$$Q_3 = \rho / (R_i + R + \rho^2 / R_{\text{н}}) . \quad (2.30)$$

Запишем соотношения для комплексных коэффициентов передачи по напряжению, используя формулы (2.10) и (2.23), в виде

$$\tilde{K}_C = \dot{U}_C / \dot{E} = [e^{-j\varphi_z} / (j\omega C)] / (R\sqrt{1+a^2}) ; \quad (2.31)$$

$$\tilde{K}_L = \dot{U}_L / \dot{E} = [(j\omega L)e^{-j\varphi_z}] / (R\sqrt{1+a^2}) .$$

Разделив числитель и знаменатель выражений (2.31) на ω_p и используя формулу (2.17), при $\omega = \omega_p$ получим

$$\tilde{K}_C = [(Q \omega_p / \omega) / \sqrt{1+a^2}] e^{-j(\varphi_z + \pi/2)} ; \quad (2.32)$$

$$\tilde{K}_L = [(Q \omega / \omega_p) / \sqrt{1+a^2}] e^{j(\pi/2 - \varphi_z)} .$$

Учитывая однозначную связь АЧХ и ФЧХ, будем интересоваться лишь значениями модуля коэффициента передачи по напряжению. Подставляя $\omega = \omega_p$ в (2.32) получим резонансные значения коэффициентов передачи $|\tilde{K}_{Cp}| = |\tilde{K}_{Lp}| = Q$ и нормированные значения

$$\begin{aligned} n_C &= |\tilde{K}_C|/|\tilde{K}_{Cp}| = (\omega_p/\omega)/\sqrt{1+a^2}; \\ n_L &= |\tilde{K}_L|/|\tilde{K}_{Lp}| = (\omega/\omega_p)/\sqrt{1+a^2}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Формулы (2.33) указывают на несимметричный характер АЧХ коэффициентов передачи по напряжению относительно резонансного значения частоты. Увеличение Q при постоянном значении обобщенной расстройки “ a ” приводит к уменьшению $\Delta\omega = |\omega - \omega_p|$. При этом $\omega_p/\omega \approx 1$. При $Q > 10$ согласно (2.33) можно приближенно записать

$$n_C \approx n_L \approx n. \quad (2.34)$$

Формула (2.34) означает, что при достаточно больших значениях Q свойства АЧХ контура по току распространяются на нормированный коэффициент передачи по напряжению. Характеристика n называется резонансной характеристикой.

2.5. Понятие полосы пропускания контура

Форма резонансной характеристики $n(\omega)$ определяется значением добротности и резонансной частоты. Можно ввести понятие полосы пропускания, которая лаконично описывает частотные характеристики.

Под полосой пропускания понимают такой интервал частот, в пределах которого значение коэффициента передачи уменьшается не более, чем в $\sqrt{2}$ раз по сравнению с максимальным. Таким образом, обобщенная расстройка, соответствующая границе полосы пропускания, может быть определена из соотношения

$$1/\sqrt{2} = 1/\sqrt{1+a_0^2} = n_0,$$

или

$$a_0 = 2Q\Delta\omega_0 / \omega_p = 1 ,$$

$$2\Delta\omega_0 = \omega_p / Q . \quad (2.35)$$

Таким образом, полоса пропускания $2\Delta\omega$ прямо пропорциональна резонансной частоте и обратно пропорциональна добротности. Отметим также, что на границе полосы пропускания фазовый сдвиг $\psi_i - \psi_E = \pm 45^\circ$ (рис.6).

Легко показать, что величина полуширины полосы пропускания обратно пропорциональна постоянной времени цепи

$$\Delta\omega_0 = \omega_p / (2Q) = R / (2L) = \delta = 1/\tau . \quad (2.36)$$

Формулы (2.35), (2.36) показывают, что полоса пропускания описывает свойства контура как в режиме свободных колебаний, так и в установившемся режиме при внешнем воздействии. Поэтому при определении характеристик контура особенно важно измерение полосы пропускания. Обычно для этого изменяют величину одного из реактивных элементов (чаще емкости) при постоянной частоте гармонического воздействия. Такой метод используют для построения резонансных волномеров.

Поясним работу этих устройств. Пусть частота колебаний источника ω в результате вариации емкости контура совпадает с резонансным значением

$$\omega = \omega_p = 1 / \sqrt{L_p C_p} .$$

Назовем C_p резонансной емкостью. Перестраивая емкость C при неизменной частоте входного воздействия ω_p , получают следующие значения собственных частот контура ω_{01} и ω_{02} , для которых

$$\omega_{01} = \omega_p + \Delta\omega_0 = 1 / \sqrt{L_p C_1} ;$$

$$\omega_{02} = \omega_p - \Delta\omega_0 = 1 / \sqrt{L_p C_2} .$$

Возведем в квадрат выражения для ω_{01} и ω_{02} и вычтем из ω_{01}^2 значение ω_{02}^2 . В результате получим

$$\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2 = 4\Delta\omega_0 \omega_p = 1/(L_p C_1) - 1/(L_p C_2) .$$

После деления обеих частей последнего равенства на $2\omega_p^2$ получим

$$2\Delta\omega_0/\omega_p = (C_2 - C_1)/(2\omega_p^2 L_p C_1 C_2) \cong (C_2 - C_1)/(2\omega_p^2 L_p C_p^2) = (C_2 - C_1)/(2C_p) .$$

В последнем соотношении учтено, что при больших значениях Q величины C_1 и C_2 мало отличаются друг от друга и $C_p^2 \approx C_1 C_2$. На основании формулы (2.35) и последних равенств запишем

$$Q = 2C_p/(C_2 - C_1) , \quad (2.37)$$

а также

$$2\Delta\omega_0 = \omega_p(C_2 - C_1)/(2C_p) . \quad (2.38)$$

Формула (2.38) позволяет определить полосу пропускания по двум значениям емкости, соответствующим границам полосы пропускания контура.

Вопросы для самопроверки.

1. Определите понятие резонанса в цепи и, в частности, запишите условие резонанса в последовательном контуре.
2. Какие свойства одиночного последовательного контура характеризуются добротностью?
3. Приведите частотные зависимости для сопротивления, тока и напряжения на реактивных элементах последовательного контура.
4. Определите понятие полосы пропускания последовательного контура.
5. Укажите пути экспериментального измерения полосы пропускания последовательного контура.

Задача.

На вход последовательного контура, состоящего из емкости $C=64$ пф, индуктивности $L=16$ мкГн, сопротивления $R=5$ Ом, подано гармоническое воздействие с частотой, совпадающей с резонансной частотой контура. Определите значение резонансной частоты f_p , угловую частоту ω_p , добротность Q , характеристическое сопротивление ρ , постоян-

ную времени τ , полосу пропускания $2\Delta f$. Определите, какова должна быть частота источника воздействия, при которой амплитуда тока в контуре уменьшается в 1,1 раза? в 3,0 раза? в 5 раз?

Решение.

$$1. \omega_p = 1/\sqrt{LC} = 10^9 / \sqrt{16 \times 64} = 3,12 \times 10^7 \text{ рад/с};$$

$$f_p = \omega_p / (2\pi) = 5 \times 10^6 \text{ Гц}.$$

$$2. \rho = \omega_p L = 1/(\omega_p C) = \sqrt{L/C} = 16 \times 10^{-6} \times 3,12 \times 10^7 = 500 \text{ Ом}.$$

$$3. Q = \rho/R = 500/5 = 100.$$

$$4. \tau = 2L/R = 2Q/\omega_p = 200/3,12 \times 10^7 = 6,4 \times 10^{-6} \text{ с}.$$

$$5. 2\Delta\omega_0 = \omega_p/Q; \quad 2\Delta f_0 = f_0/Q = 5 \times 10^6/100 = 5 \times 10^4 \text{ Гц}.$$

$$6. \text{Из соотношения } n = 1/\sqrt{1+a^2} \text{ для } n = \{1/1,1; 1/3; 1/5\} \text{ имеем}$$

$$a = (2\Delta f/f_p)Q = \{0,46; 2\sqrt{2}; 2\sqrt{6}\}.$$

Отсюда получим значение искомых частот при уменьшении амплитуды в 1,1 раза

$$f_{1,2} = f_p \pm 0,46/(2\pi\tau) = (5 \pm 0,011) \times 10^6 \text{ Гц}.$$

ЛЕКЦИЯ 3

Параллельный колебательный контур при гармоническом воздействии

3.1. Резонанс в параллельном колебательном контуре.

Сопротивление последовательного колебательного контура на резонансе минимально. При создании избирательных усилительных каскадов требуется в нагрузочные цепи усилительных элементов включать частотно-избирательное устройство. Коэффициент усиления каскада по напряжению тем больше, чем выше сопротивление нагрузки. Возникает потребность в избирательном устройстве, которое обладает максимальным сопротивлением на резонансной частоте. Таким устройством является параллельный колебательный контур.

Обобщенная схема параллельного колебательного контура представлена на рис.8,а.

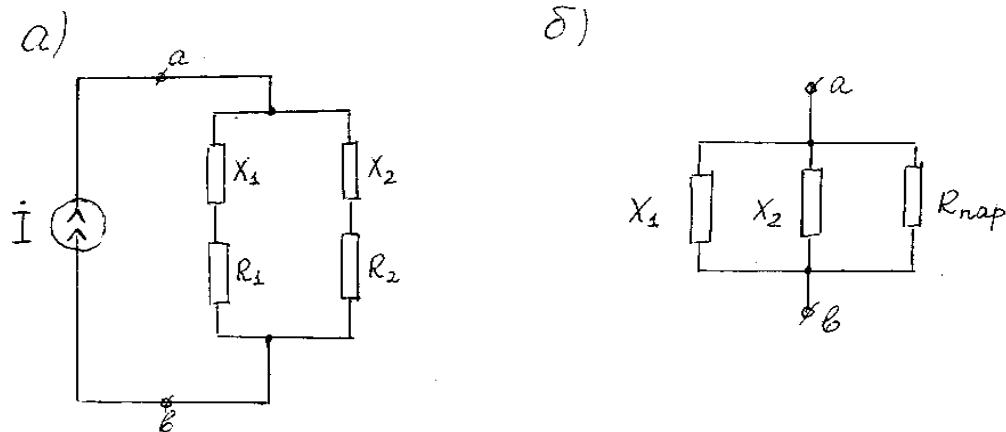


Рис 8

Входным воздействием является ток с комплексной амплитудой $\dot{I}$. Согласно представлению о последовательном колебательном контуре, в контуре должен происходить обмен энергией, накопленной в реактивных элементах. Будем считать, что левая ветвь контура имеет индуктивный характер $(+X_1)$, а правая - емкостный $(-X_2)$. Комплексное сопротивление ветвей параллельного контура можно представить в виде

$$Z_1 = R_1 + jX_1,$$

$$Z_2 = R_2 - jX_2. \quad (3.1)$$

Комплексное сопротивление Z на зажимах ab может быть определено в виде

$$Z_{ab} = [(R_1 + jX_1)(R_2 - jX_2)] / [(R_1 + R_2) + j(X_1 - X_2)] . \quad (3.2)$$

Для избирательных цепей обычно выполняется условие

$$R_1 \ll X_1 , R_2 \ll X_2 . \quad (3.3)$$

Введя обозначение $R = R_1 + R_2$ с учетом (3.3) можно переписать (3.2) в виде

$$Z_{ab} \cong X_1 X_2 / [R + j(X_1 - X_2)] . \quad (3.4)$$

Отсюда следует условие резонанса в параллельном контуре с малыми потерями

$$X = X_{1p} - X_{2p} = 0 . \quad (3.5)$$

Оно совпадает с условием резонанса для последовательного контура. Это означает, что последовательный и параллельный контуры, собранные на идентичных элементах, имеют одинаковые резонансные частоты.

Выясним свойства параллельного контура при резонансе. Сопротивление параллельного контура $Z_{\text{эп}}$ при резонансе называется эквивалентным резонансным сопротивлением. Определим его на основании (3.4) и (3.5)

$$Z_{\text{эп}} = X_{1p}^2 / R = X_{2p}^2 / R . \quad (3.6)$$

Это чисто активное сопротивление.

Для контура без потерь $R \rightarrow 0$ и согласно (3.6) $Z_{\text{эп}} \rightarrow \infty$. Такой контур не будет шунтироваться источником, внутреннее сопротивление которого $R_i \rightarrow \infty$, т.е. идеальным источником тока.

Выясним соотношение между амплитудами токов ветвей контура и амплитудой тока источника. Запишем соотношение для комплексной амплитуды тока в виде

$$\dot{I} = \dot{U} / Z = \dot{U}[(R / (X_1 X_2)) + j(1 / X_2) - j(1 / X_1)].$$

В этой формуле учтено равенство (3.4). Выражение для комплексной амплитуды тока $\dot{I}$ можно переписать

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_{x1} + \dot{I}_{x2}. \quad (3.7)$$

Здесь

$$\dot{I}_R = \dot{U} R / (X_1 X_2); \quad \dot{I}_{x1} = -j(\dot{U} / X_1); \quad \dot{I}_{x2} = j(\dot{U} / X_2).$$

Уравнение (3.7) можно трактовать согласно первому закону Кирхгофа как суперпозицию токов, протекающих по элементам $R_{\text{пар}}, X_1, X_2$, соединенным параллельно. Это позволяет получить параллельную схему замещения параллельного контура. Реактивные элементы этой схемы замещения идентичны элементам исходной схемы (рис.8б), а активное сопротивление

$$R_{\text{пар}} = X_1 X_2 / R. \quad (3.8)$$

На резонансной частоте при выполнении условия (3.5) уравнение (3.7) имеет вид

$$\dot{I} = \dot{U} R / X_{1p}^2 = \dot{U} (R / X_{2p}^2). \quad (3.9)$$

При этом резонансные значения токов реактивных ветвей

$$\begin{aligned} \dot{I}_{x2p} &= \dot{U} e^{j\pi/2} / X_{2p} = \dot{I} (X_{2p} / R) e^{j\pi/2} = \dot{I} (X_{1p} / R) e^{j\pi/2}, \\ \dot{I}_{x1p} &= \dot{U} e^{-j\pi/2} / X_{1p} = \dot{I} (X_{1p} / R) e^{-j\pi/2} = \dot{I} (X_{2p} / R) e^{-j\pi/2}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Эти формулы показывают, что при условии резонанса и при малом значении R реактивные ветви контура обтекаются одним контурным током $\dot{I}_k$ с амплитудой

$$I_{x1p} = I_{x2p} = I_k = I (X_{1p} / R) = I (X_{2p} / R). \quad (3.11)$$

Для пояснения на рис.9 построена векторная диаграмма токов в ветвях параллельной схемы замещения контура.

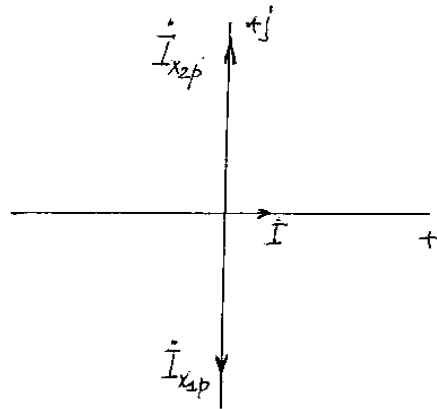


Рис 9

Амплитуда тока в параллельном контуре при резонансе согласно (3.11) превышает амплитуду тока источника в X_{1p}/R раз (или в X_{2p}/R раз). Такое явление называется резонансом токов. Оно существует только в параллельном колебательном контуре.

3.2. Виды параллельных колебательных контуров.

В общем случае под реактивными элементами, образующими сопротивление X_1 и X_2 , в (3.1) можно понимать любую комбинацию индуктивностей и емкостей. В зависимости от конкретных соединений в схеме различают четыре вида параллельных колебательных контуров. Схемы параллельных контуров I-го, II-го, III-го видов представлены, соответственно, на рис.10,а,б,в, а схема IV-го вида является комбинацией составных ветвей схем контуров II-го и III-го видов [2].

Используя соотношения (3.5), (3.6) и (3.11), запишем расчетные формулы для определения резонансной частоты ω_p , эквивалентного резонансного сопротивления $Z_{\text{эп}}$ и отношения амплитуд токов I_k/I для трех контуров рис.10.

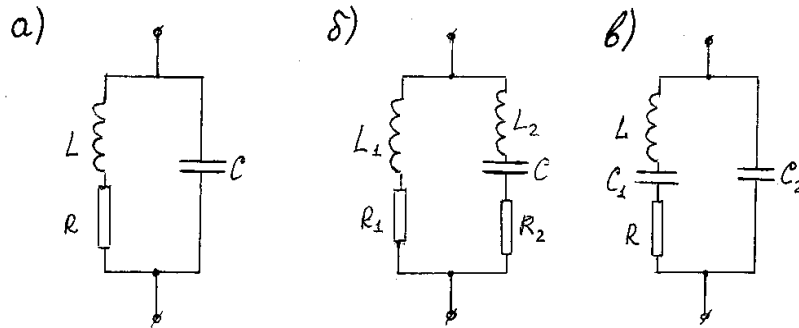


Рис 10

Для контура первого вида

$$\omega_p = 1/\sqrt{LC} ;$$

$$Z_{\text{эп}} = X_{1p}^2/R = X_{2p}^2/R = \omega_p^2 L^2/R = \rho^2/R = Q\rho = Q^2 R ; \quad (3.12)$$

$$I_k/I = X_{1p}/R = \rho/R = Q .$$

В этих формулах, как и в случае последовательного контура, характеристическое сопротивление $\rho = \sqrt{L/C}$, а добротность контура $Q = \rho/R$. Для контура второго вида

$$\omega_p = 1/\sqrt{LC} , \text{ где } L = L_1 + L_2 ;$$

$$Z_{\text{эп}} = X_{1p}^2/R = (\omega_p L_1)^2/R = p^2(\rho^2/R) = p^2 Q\rho , \text{ где } p = L_1/L ; \quad (3.13)$$

$$I_k/I = X_{1p}/R = \omega_p L_1/R = p(\rho/R) = pQ .$$

В этих выражениях величину p называют коэффициентом включения контура.

Легко заметить, что для контура третьего вида формулы для ω_p , $Z_{\text{эп}}$ и I_k/I будут идентичны формулам (3.13), при этом под емкостью контура следует понимать

$$C = C_1 C_2 / (C_1 + C_2) ,$$

а под величиной коэффициента включения

$$p = C/C_2 = C_1/(C_1 + C_2) . \quad (3.14)$$

Для параллельных контуров II-го и III-го вида амплитуда тока в контуре превышает амплитуду тока источника в pQ раз, причем $p \leq 1$. Величина сопротивления контура при резонансе есть $Z_{\text{эп}} = p^2 Q \rho$. Она в p^2 раз меньше, чем сопротивление контура I-го вида. Применение контуров II-го и III-го вида необходимо в ряде случаев для согласования избирательных схем по мощности. При резонансе на активном сопротивлении контура расходуется мощность

$$(I_k^2/2)R = I^2 Z_{\text{эп}}/2 ,$$

которая может меняться в зависимости от коэффициента включения в пределах от 0 до $P_{\text{макс}}$,

$$I_k^2/I^2 = Z_{\text{эп}}/R = (pQ)^2 . \quad (3.15)$$

3.3. Резонансные характеристики параллельного колебательного контура.

Рассмотрим АЧХ и ФЧХ параллельного контура. Они определяются частотными свойствами сопротивления $Z_{\text{аб}}$ (3.4).

Введем аналогично случаю последовательного контура величину обобщенной расстройки “а” и запишем соотношение в знаменателе (3.4)

$$R + j(X_1 - X_2) = R(1 + ja) . \quad (3.16)$$

Числитель формулы (3.4) определяется для контура I-го вида

$$X_1 X_2 = X_{1p}^2 = X_{2p}^2 = \rho^2 \quad (3.17)$$

и не зависит от частоты.

Для контуров II-го и III-го вида произведение $X_1 X_2$ зависит от частоты. Соотношение, аналогичное (3.17) для контуров II-го и III-го вида выполняется лишь на резонансной частоте параллельного контура

$$X_{1p} X_{2p} = X_{1p}^2 = X_{2p}^2 = p^2 \rho^2. \quad (3.18)$$

Для контуров II-го, III-го и IV-го вида еще по крайней мере один из сомножителей числителя Z стремится к нулю - возникает последовательный резонанс.

Для контуров II-го вида (рис.10.б) частота последовательного резонанса

$$\omega_{p2} = 1/\sqrt{L_2 C}. \quad (3.19)$$

Входное сопротивление контура $Z(\omega_{p2}) = 0$. Аналогично для контура III-го вида на частоте

$$\omega_{p2} = 1/\sqrt{LC_1} \quad (3.20)$$

возникает резонанс напряжения левой ветви (рис.10.в). При этом

$Z(\omega_{p2}) \rightarrow 0$. Если собственная добротность Q параллельного контура достаточно велика, то АЧХ контура в диапазоне частот можно рассматривать как совокупность АЧХ параллельного и последовательного резонанса. Это же относится к ФЧХ. При больших Q АЧХ и ФЧХ можно считать симметричными вблизи частоты резонанса, поэтому достаточно рассмотреть расстройку в одну сторону от резонанса при $\Delta\omega/\omega_p \ll 1$.

Вблизи частоты параллельного резонанса на основании формул (3.4), (3.15), (3.16) имеем

$$Z_{ab} = Z_{\text{эп}}/(1+ja) = (Z_{\text{эп}}/\sqrt{1+a^2})e^{-j\arctg a}. \quad (3.21)$$

На частотах, близких к частоте последовательного резонанса в одной из ветвей реализуется характеристика сопротивления, рассмотренная в лекции 2.

Частотная характеристика Z_{ab} параллельного контура II-го вида представлена на рис.11 а.

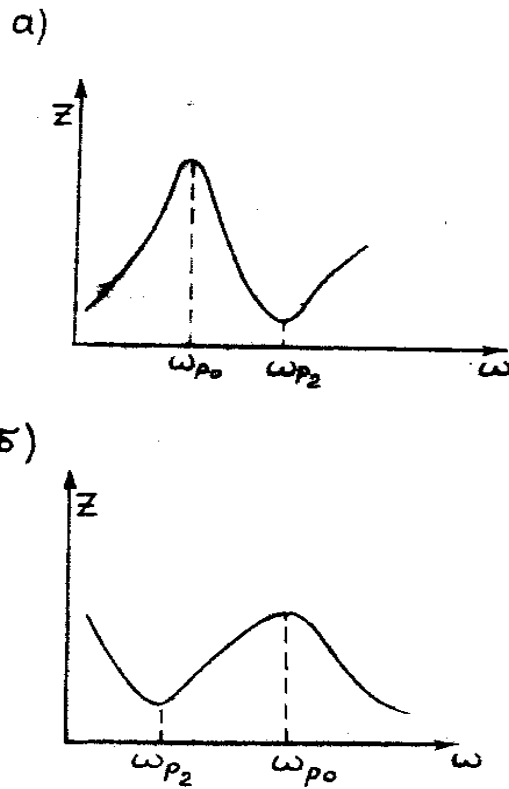


Рис 11

В этом случае

$$\omega_{p0} = 1/\sqrt{LC} < \omega_{p2} = 1/\sqrt{L_2C} ,$$

так как $L = L_1 + L_2 > L_2$.

На рис.11.б приведена частотная характеристика Z_{ab} для контура III-го вида. Здесь

$$\omega_{p0} = 1/\sqrt{LC} > \omega_{p2} = 1/\sqrt{LC_1} ,$$

так как

$$C = C_1 C_2 / (C_1 + C_2) < C_1 .$$

Из этих графиков видно, что на частоте $\omega = \omega_{p2}$ происходит "закорачивание" параллельного контура и подавление амплитуды гармонического воздействия.

Выразим амплитуду напряжения, снимаемого с контура (на зажимах ab рис.8) вблизи частоты ω_{p0} параллельного резонанса ,

$$\dot{U}_{ab} = \dot{I}Z = IZ_{\varepsilon p} / (1 + ja) . \quad (3.22)$$

Вблизи частоты ω_{p2} последовательного резонанса $\dot{U}_{ab} = 0$, так как входное сопротивление контура при последовательном резонансе равно нулю.

Отметим, что форма АЧХ параллельного контура вблизи частоты параллельного резонанса на основании (3.22) соответствует

$$n = \left| \dot{U}_{ab} \right| / \left| \dot{U}_{abp} \right| = 1 / \sqrt{1 + a^2} . \quad (3.23)$$

Здесь $\dot{U}_{abp} = \dot{I}Z_{\varepsilon p}$ при $a = 0$. Эта характеристика идентична резонансной характеристике последовательного контура.

Свойства последовательного резонанса в контурах II-го, III-го и IV-го вида можно использовать для подавления уровня напряжения мешающей частоты относительно амплитуды напряжения полезной частоты, равной частоте параллельного резонанса.

3.4. Влияние внутреннего сопротивления генератора на свойства параллельного колебательного контура.

В общем случае источник воздействия не является идеальным источником тока и имеет конечное внутреннее сопротивление. Генератор тока в этом случае можно представить с помощью эквивалентного источника ЭДС (рис.12). С учетом внутреннего сопротивления генератора R_i АЧХ и ФЧХ изменятся по сравнению с (3.22). Рассмотрим это влияние на частотах $\omega = \omega_{p0} \pm \Delta\omega$, где $\Delta\omega/\omega_{p0} \ll 1$. Согласно рис.12 и закону Ома комплексная амплитуда тока

$$\dot{I} = E / (R_i + Z_{ab}) , \quad (3.24)$$

a комплексная амплитуда напряжения на контуре

$$\dot{U}_{ab} = \dot{I}Z_{ab} = EZ_{ab} / (R_i + Z_{ab}) . \quad (3.25)$$

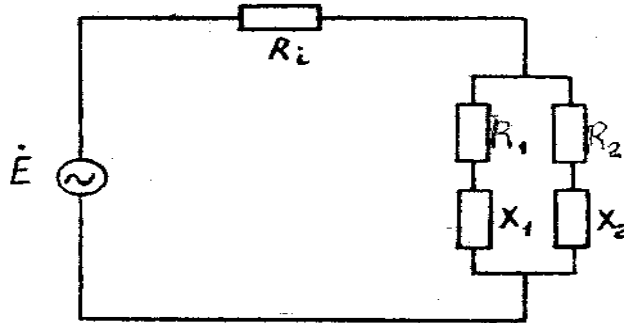


Рис 12

На частоте параллельного резонанса ω_p это

$$\dot{U}_{abp} = EZ_{\varepsilon p} / (R_i + Z_{\varepsilon p}) . \quad (3.26)$$

На основании (3.25), (3.26) и (3.21) получим

$$\dot{U}_{ab} / \dot{U}_{abp} = 1 / [1 + ja / (1 + Z_{\varepsilon p} / R_i)] . \quad (3.27)$$

Подставив в (3.27) приближенное выражение для обобщенной расстройки (2.21) получим нормированную АЧХ в виде

$$n = |\dot{U}_{ab} / \dot{U}_{abp}| = 1 / \sqrt{1 + [Q / (1 + Z_{\varepsilon p} / R_i)]^2 (2\Delta\omega / \omega_{p0})^2} . \quad (3.28)$$

Сравним (3.28) и (3.23). Эти формулы совпадают при $R_i \rightarrow \infty$. Введем понятие эквивалентной добротности параллельного контура

$$Q_3 = Q / (1 + Z_{\varepsilon p} / R_i) . \quad (3.29)$$

С увеличением R_i эквивалентная добротность Q_3 контура возрастает. В пределе $Q_3 \rightarrow Q$ при $R_i \rightarrow \infty$.

Полоса пропускания параллельного колебательного контура определяется так же, как и последовательного контура, формулой (2.35). При наличии внутреннего сопротивления генератора в этой формуле вместо величины добротности контура Q следует использовать значение эквивалентной добротности Q_0 .

Форму АЧХ последовательного или параллельного контура нельзя изменить не меняя полосу пропускания. Это существенный недостаток одиночных колебательных контуров.

Вопросы для самопроверки.

1. Запишите точное и приближенное выражение для комплексного сопротивления параллельного контура.
2. В чем сущность явления резонанса в параллельном контуре?
3. Приведите графики резонансных характеристик входного сопротивления контуров I, II, III видов. Чему равно их сопротивление на частоте последовательного и параллельного резонанса?
4. Объясните влияние внутреннего сопротивления генератора на свойства параллельного контура.

Задача.

Генератор гармонических колебаний с амплитудой $E=1\text{В}$ и $R_i=28\text{кОм}$ подключен к зажимам параллельного контура II-го вида, индуктивная ветвь которого содержит $L_1=12\text{мкГн}$, $R=5\text{Ом}$, емкостная - $L_2=4\text{мкГн}$, $C=64\text{пф}$. Определить, какова должна быть частота генератора, чтобы он был настроен на частоту параллельного резонанса контура. Определить Q , ρ , сопротивление контура и амплитуду тока в контуре на резонансной частоте.

Решение.

$$1. L = L_1 + L_2 = 16\text{мкГн}, \quad \omega_p = 1/\sqrt{LC} = 10^9 / \sqrt{16 \times 64} = 3,12 \times 10^7 \text{ рад/с.}$$

Частота параллельного резонанса этого контура равна резонансной частоте последовательного контура в задаче лекции 2, так же как и характеристическое сопротивление $\rho=500\text{ Ом}$ и добротность $Q=100$.

2. Коэффициент включения

$$p = L_1/L = 12 \times 10^{-6} / 16 \times 10^{-6} = 0,75.$$

3. Сопротивление контура на резонансе

$$Z_{\text{эп}} = p^2 Q \rho = (0,75)^2 100 \times 500 = 28 \times 10^3 \text{ Ом.}$$

4. Эквивалентная добротность

$$Q_{\text{э}} = Q / (1 + Z_{\text{эп}}/R_i) = 100 / (1 + 28 \times 10^3 / 28 \times 10^3) = 50.$$

5. Ток в контуре на частоте параллельного резонанса

$$I_k = I_p Q = E / (R_i + Z_{\text{эп}}) p Q = 1 / (2 \times 28 \times 10^3) \times 0,75 \times 100 = 1,33 \times 10^{-3} \text{ А.}$$

ЛЕКЦИЯ 4

Системы связанных колебательных контуров

4.1. Общие сведения.

Избирательное устройство с регулируемой формой АЧХ и ФЧХ при постоянной добротности и резонансной частоте можно создать на основе связанных колебательных контуров. В таких контурах часть электромагнитной энергии из одного контура передается в другой через элемент связи [3,4].

По схеме включения элемента связи системы связанных контуров подразделяются на контуры с внутренней связью (рис.13,а,б,в,г,д,е), обобщенная схема таких контуров представлена на рис.13,и, и схемы с внешней связью (рис.13,ж,з), их обобщенная схема изображена на рис.13 к.

По виду связи различают гальваническую связь (рис.13,а), кондуктивную трансформаторную (рис.13,б), индуктивную трансформаторную (рис.13,в), емкостную (рис.13,г) и смешанную (кондуктивно-емкостную (рис.13,д) или индуктивно-емкостную (рис.13,е)). Для схем с внешней связью связь может быть индуктивной (рис.13,ж) и емкостной (рис.13,з).

Наибольшее практическое применение имеют схемы связанных контуров с реактивным элементом связи.

Каждый из контуров, входящих в систему связанных контуров, характеризуется резонансной частотой, характеристическим сопротивлением, добротностью, определяемыми собственной индуктивностью, емкостью и сопротивлением контура. Собственные элементы контуров определяются с учетом элементов связи. Для схем с внешней связью второй контур при этом должен быть закорочен, а для схем с внутренней связью - разомкнут. Так для схемы 13,б собственная индуктивность контура $L_1=L_I+L_0$, $L_2=L_{II}+L_0$, для схемы 13,г собственная емкость $C_1=C_I C_0/(C_I+C_0)$, $C_2=C_{II} C_0/(C_{II}+C_0)$, для схемы 13,ж собственная индуктивность $L_1=L_I L_0/(L_I+L_0)$, $L_2=L_{II} L_0/(L_{II}+L_0)$, для схемы 13,з $C_1=C_I+C_0$, $C_2=C_{II}+C_0$. Собственные элементы контуров обозначаются арабскими цифрами.

Для аналитического описания величины связи между контурами вводят коэффициент связи k

$$k = \sqrt{\xi_1 \xi_2}, \quad (4.1)$$

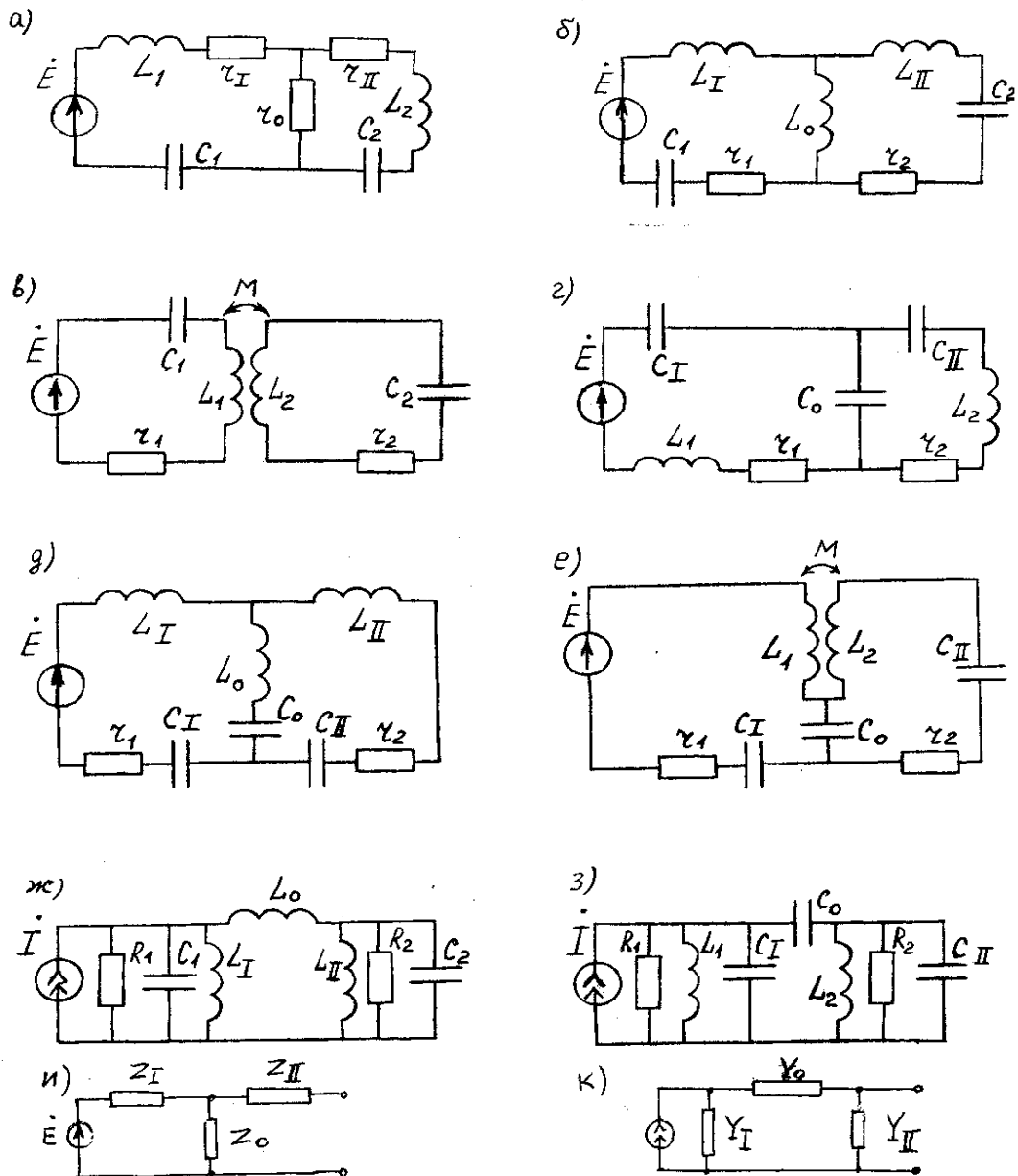


Рис 13

здесь ξ_1 - степень связи второго контура с первым;

ξ_2 - степень связи первого контура со вторым.

Величина ξ_1 равна отношению мощности, передаваемой из первого контура во второй через элемент связи, к мощности, запасаемой в первом контуре на частоте резонанса первого контура при исключении

влияния второго контура. Для связанных контуров с внутренней связью второй контур размыкается, для контуров с внешней связью - закорачивается.

Величина ξ_2 равна отношению мощности, передаваемой из второго контура в первый через элемент связи, к мощности, запасаемой во втором контуре, на частоте резонанса второго контура при исключении влияния первого контура (первый контур размыкается при внутренней связи или закорачивается, если связь внешняя). Для контуров с внутренней связью

$$\xi_1 = I_p^2 z_{op1} / (I_p^2 \rho_1) = z_{op1} / \rho_1 ; \quad \xi_2 = I_p^2 z_{op2} / (I_p^2 \rho_2) = z_{op2} / \rho_2 .$$

Здесь I_p - амплитуда тока, обтекающего контур; z_{op1} , z_{op2} - модуль реактивного сопротивления связи на резонансной частоте первого и второго контуров соответственно; ρ_1 , ρ_2 - характеристические сопротивления первого и второго контуров.

Для контуров с внешней связью

$$\xi_1 = U_{pk}^2 \rho_1 / (z_{op1} U_{pk}^2) = \rho_1 / z_{op1} ; \quad \xi_2 = U_{pk}^2 \rho_2 / (z_{op2} U_{pk}^2) = \rho_2 / z_{op2} .$$

Здесь U_{pk} - амплитуда напряжения на контуре.

В результате коэффициент связи для контуров с внутренней связью есть

$$k_T = \sqrt{z_{op1} z_{op2} / (\rho_1 \rho_2)} , \quad (4.2)$$

и для контуров с внешней связью

$$k_{\Pi} = \sqrt{\rho_1 \rho_2 / (z_{op1} z_{op2})} . \quad (4.3)$$

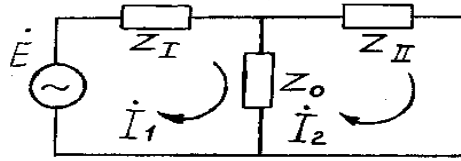
В соответствии с законом сохранения энергии величина коэффициента связи не превышает единицу $k \leq 1$.

Схемы связанных контуров с внешней и внутренней связью дуальны (рис.13, и,к). Это означает, что получаемые для них закономерности являются общими с учетом соотношения дуальности.

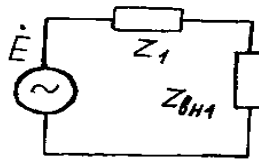
4.2. Схема замещения для системы связанных контуров с внутренней связью.

Обобщенная схема связанных контуров при закороченной нагрузке представлена на рис.14,а.

а)



б)



в)

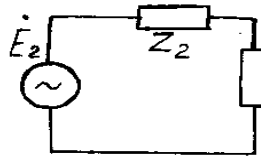


Рис 14

Запишем уравнения контурных токов согласно указанным на схеме направлениям контурных токов $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$

$$\dot{E} = \dot{I}_1(Z_I + Z_0) - \dot{I}_2 Z_0,$$

$$0 = -\dot{I}_1 Z_0 + \dot{I}_2(Z_{II} + Z_0). \quad (4.4)$$

Согласно определению $Z_1 = Z_I + Z_0$ - собственное сопротивление первого, а $Z_2 = Z_{II} + Z_0$ - собственное сопротивление второго контура. С учетом этих обозначений и согласно (4.4) запишем выражения для комплексных амплитуд токов в первом и втором контурах

$$\dot{I}_1 = \dot{E} / (Z_1 - Z_0^2 / Z_2);$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 Z_0 / Z_2 . \quad (4.5)$$

Величина

$$Z_{\text{вн1}} = - Z_0^2 / Z_2 \quad (4.6)$$

называется сопротивлением, вносимым из второго контура в первый.

Перепишем (4.5) в виде

$$\dot{I}_1 = E / (Z_1 + Z_{\text{вн1}})$$

Это закон Ома для последовательной схемы замещения системы двух связанных контуров, представленной на рис.14,б.

Подставляя значение тока $\dot{I}_1$ из первого уравнения во второе (4.5), получим закон Ома для схемы замещения рис. 14,в

$$\dot{I}_2 = E Z_0 / [Z_2 (Z_1 - Z_0^2 / Z_2)] = E_{2\infty} / (Z_2 + Z_{\text{вн2}}). \quad (4.7)$$

Здесь

$$E_{2\infty} = E Z_0 / Z_1 ;$$

$Z_{\text{вн2}} = - Z_0^2 / Z_1$ вносимое сопротивление из первого контура во второй.

Для системы связанных контуров с реактивным сопротивлением связи

$$Z_0 = jX_0 . \quad (4.8)$$

Собственные сопротивления контуров представим согласно (2.18), (2.20) в виде

$$Z_1 = R_1 + jX_1 = R_1(1 + ja_1) \approx R_1 + j\rho_1(1 - \omega_{p1}^2 / \omega^2) ;$$

$$Z_2 = R_2 + jX_2 = R_2(1 + ja_2) \approx R_2 + j\rho_2(1 - \omega_{p2}^2 / \omega^2). \quad (4.9)$$

Здесь $\omega_{p1} = 1/\sqrt{L_1 C_1}$ и $\omega_{p2} = 1/\sqrt{L_2 C_2}$ резонансная частота соответственно первого и второго контура.

На основании (4.6), (4.8), (4.9) получим

$$Z_{BH1} = (X_0/z_2)^2(R_2 - jX_2) = R_{BH1} + jX_{BH1}, \quad (4.10)$$

где

$$R_{BH1} = (X_0^2/z_2^2)R_2 = [X_0^2/(1 + a_2^2)](1/R_2); \quad (4.11)$$

$$X_{BH1} = (-X_0^2/z_2^2)X_2 = [-X_0^2/(1 + a_2^2)](a_2/R_2); \quad (4.12)$$

z_1, z_2 - модули сопротивления I, II контуров.

Таким образом, вносимое сопротивление имеет комплексный характер. Зависимости R_{BH1} и X_{BH1} от обобщенной расстройки приведены на рис.15.

4.3. Резонансы в системе связанных колебательных контуров

С учетом схем замещения, рис.14 б,в запишем условия резонанса системы связанных контуров

$$X_1 + X_{BH1} = X_1 - (X_0^2/z_2^2)X_2 = 0,$$

$$X_2 + X_{BH2} = X_2 - (X_0^2/z_1^2)X_1 = 0. \quad (4.13)$$

Если в результате подбора сопротивлений X_1 и X_2 достигается выполнение первого или второго уравнения (4.13), то в системе связанных контуров возникает первый или второй частный резонанс. Первый частный резонанс обычно достигается при изменении индуктивности или емкости первого контура при постоянных элементах второго контура. Второй частный резонанс - при изменении элементов второго контура при постоянных элементах первого.

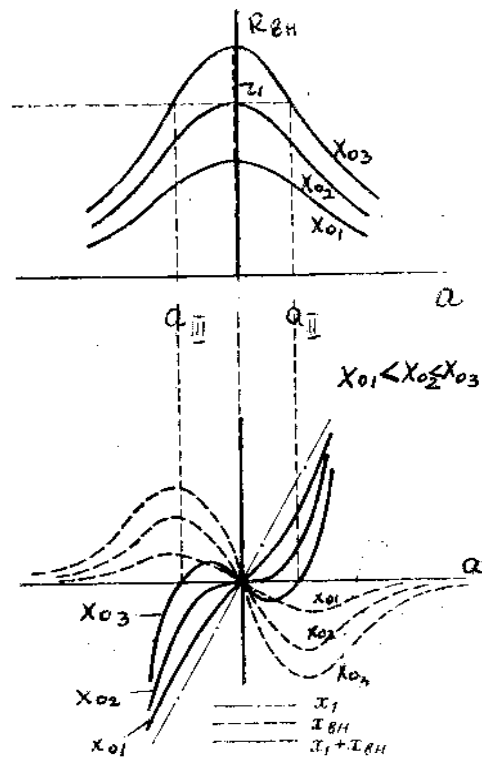


Рис 15

Состояние резонанса в системе связанных контуров, соответствующее одновременному выполнению условий (4.13), при $X_1 = X_2 = 0$ называют основным резонансом, а при условии $X_1 \neq 0$, $X_2 \neq 0$ резонанс называется сложным или оптимальным. Последнее название объясняется (можно показать) тем, что при этом выполняется условие передачи оптимальной мощности из первого контура во второй.

Определим значения резонансных частот. Для упрощения будем считать, что контуры в связанной системе обладают одинаковой резонансной частотой и добротностью

$$\omega_{p1} = \omega_{p2} = \omega_p;$$

$$Q_1 = Q_2 = Q. \quad (4.14)$$

Учитывая (4.9), (4.14), запишем первое уравнение (4.13) в виде

$$\rho_1(1 - \omega_p^2/\omega^2) - X_0^2/|Z_2|^2 \rho_2(1 - \omega_p^2/\omega^2) = 0. \quad (4.15)$$

Это уравнение позволяет получить три решения. Первое из них

$$1 - \omega_p^2/\omega^2 = 0$$

или

$$\omega = \omega_{p1} = \omega_{p2} = 1/\sqrt{L_1 C_1} = 1/\sqrt{L_2 C_2}.$$

Полученное значение резонансной частоты совпадает с собственными резонансными частотами контуров системы. На этой частоте выполняется условие основного резонанса.

После деления (4.15) на

$$(1 - \omega_p^2/\omega^2) \quad \text{получим}$$

$$\rho_1/\rho_2 - X_0^2/z_2^2 = 0. \quad (4.16)$$

Отсюда найдем второе и третье решение (4.15).

После подстановки в (4.16) модуля z_2^2 из уравнения (4.9) получим

$$R_2^2 + \rho_2^2(1 - \omega_p^2/\omega^2)^2 = (X_0^2/\rho_1)\rho_2.$$

Используя формулу (4.2), преобразуем последнее уравнение к виду

$$R_2^2/\rho_2^2 + (1 - \omega_p^2/\omega^2)^2 = k^2.$$

Положим далее, что при малых расстройках $\Delta\omega/\omega_p \ll 1$ выполняется условие

$$\rho_1/R_1 \approx \rho_2/R_2 = Q_1 = Q_2 = Q = 1/d.$$

Тогда решение последнего уравнения есть

$$\omega_{I,II} = \omega_p / \sqrt{1 \pm \sqrt{k^2 - d^2}}. \quad (4.17)$$

Оно имеет смысл при условии $k \geq d$. Частоты ω_I и ω_{II} называются частотами связи. Можно показать, что на этих частотах удовлетворяются

оба уравнения (4.13), т.е. на этих частотах выполняется условие сложного резонанса.

Зависимость резонансных частот в системе связанных контуров от коэффициента связи приведена на рис.16.

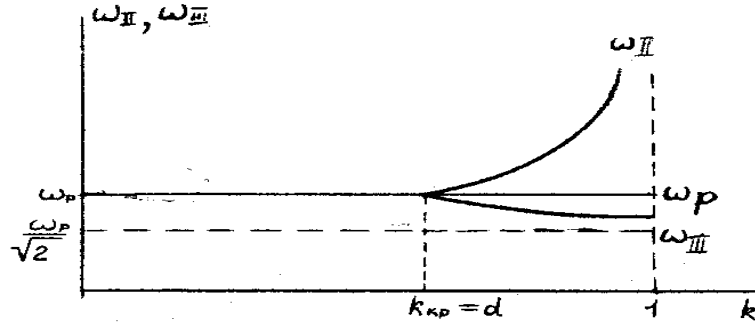


рис 16

Согласно (4.17) и рис.16 существует некоторое критическое значение коэффициента связи $k_{кр} = d$. До критической величины связи система имеет одну резонансную частоту, при связи $k > k_{кр}$ - три резонансные частоты.

4.4. Энергетические соотношения при резонансе

На основании (4.5), (4.6) и (4.11) комплексные амплитуды тока $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ на любой из резонансных частот $\omega_p, \omega_I, \omega_{II}$ есть

$$\dot{I}_1 = \dot{E} / [R_1 + (X_0^2 / Z_2^2) R_2];$$

$$\dot{I}_2 = \dot{E} / [R_1 + (X_0^2 / Z_2^2) R_2] (jX_0 / Z_2). \quad (4.18)$$

Рассмотрим случай, когда частота воздействия совпадает с частотой ω_p . При этом собственные сопротивления контуров $Z_1 = R_1$ и $Z_2 = R_2$ имеют вещественные значения.

Запишем равенство

$$X_0 / R_2 = X_0 / R_2 \sqrt{R_1 \rho_1 \rho_2 / (R_1 \rho_1 \rho_2)} = kQ \sqrt{R_1 / R_2}. \quad (4.19)$$

В последнем соотношении учтена формула (4.2).

Согласно (4.11) величина вносимого сопротивления имеет вид

$$R_{\text{вн1}} = (X_0/R_2)^2 R_2 = (kQ)^2 R_1. \quad (4.20)$$

Амплитуда тока в первом и втором контурах на основании (4.5) и (4.6) есть

$$I_1 = (E/R_1) \{1/[1 + (kQ)^2]\}; \quad (4.21)$$

$$I_2 = E/\sqrt{R_1 R_2} \{kQ/[1 + (kQ)^2]\}. \quad (4.22)$$

Функция $I_2 = f(kQ)$ имеет экстремум. Определим значение коэффициента связи, при котором I_2 максимально, из уравнения

$$dI_2/d(kQ) = 0.$$

С учетом (4.22) получим амплитуду тока $I_2 = I_{2\text{м}}$ при $kQ = 1$ или

$k = k_{\text{опт}} = d$. При этом

$$I_1(k_{\text{опт}}) = E/(2R_1), \quad I_{2\text{м}} = E/(2\sqrt{R_1 R_2}),$$

а вносимое сопротивление с учетом (4.20) $R_{\text{вн1}} = R_1$.

Отметим, что $I_1(k_{\text{опт}})$ вдвое меньше амплитуды тока первого контура $I_1 = E/R_1$ при коэффициенте связи $k = 0$.

Обычно выходное напряжение системы связанных контуров u_2 снимается с реактивного элемента, не входящего в сопротивление связи между контурами. На резонансной частоте ω_p сопротивление этого реактивного элемента представляет собой характеристическое сопротивление ρ_2 . Модуль коэффициента передачи по напряжению на частоте ω_p согласно (4.22) запишем в виде

$$k_u = U_2/E = (\rho_2/\sqrt{R_1 R_2}) kQ/[1 + (kQ)^2]. \quad (4.23)$$

Выражения (4.21) и (4.22) позволяют определить энергетические соотношения в системе связанных контуров на основной частоте резонанса.

На резонансной частоте активная мощность $P_1 = I_1^2 R_1/2$ является мощностью потерь в связанных контурах, мощность $P_2 = I_2^2 R_2/2$ представляет собой полезную мощность. При подстановке (4.21) и (4.22) в формулы для мощности получим

$$P_1 = [E^2/(2R_1)] \{1/[1 + (kQ)^2]^2\}; \quad (4.24)$$

$$P_2 = [E^2/(2R_1)] \{(kQ)^2/[1 + (kQ)^2]^2\}. \quad (4.25)$$

Для коэффициента связи $k_{\text{опт}} = d = 1/Q$ имеем

$$P_1 = P_2 = E^2/(8R_1). \quad (4.26)$$

Это максимальное значение полезной мощности. На рис.17 представлены графики нормированной мощности потерь $P_1 2R_1/E^2$ и полезной мощности $P_2 2R_1/E^2$ в зависимости от параметра kQ .

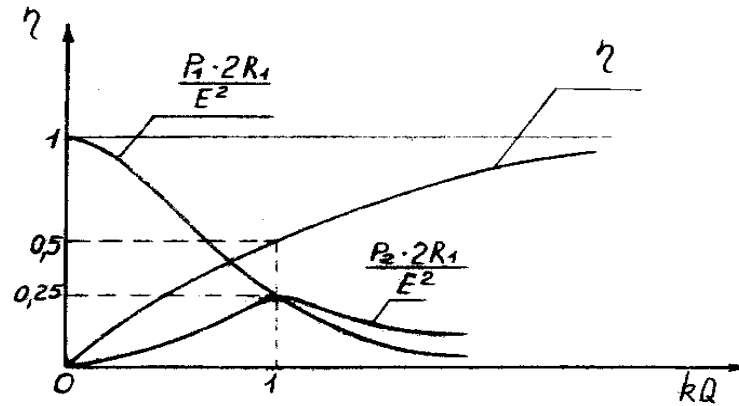


Рис 17

Нормированная мощность представляет собой отношение мощностей P_1 или P_2 к мощности, выделяемой в одиночном контуре на резонансе $E^2/(2R_1)$. Там же показана зависимость величины коэффициента полезного действия η от kQ

$$\eta = P_2/(P_1 + P_2) = (kQ)^2/[1 + (kQ)^2]. \quad (4.27)$$

Анализ формулы (4.27) показывает, что $\eta \rightarrow 1$ при $kQ \rightarrow \infty$ и $\eta = 0,5$ для критического коэффициента связи.

Рассмотрим случай сложного резонанса для идентичных связанных контуров на частотах ω_I или ω_{II} . Согласно (4.18) амплитуды тока первого и второго контуров есть

$$I_{1c} = E/[R_1 + (X_{op\ I,II}/Z_2)^2 R_2] ; \quad (4.28)$$

$$I_{2c} = E/[R_1 + (X_{op\ I,II}/Z_2)^2 R_2](X_{op\ I,II}/Z_2) . \quad (4.29)$$

Согласно (4.14) $Q_1 = Q_2$. Учитывая это условие, из уравнения (4.16) получим

$$X_{op\ I,II}/Z_2 = \sqrt{\rho_1 / \rho_2} = \sqrt{R_1 / R_2} . \quad (4.30)$$

Используя (4.11), (4.30), определим сопротивление

$$R_{вн1} = R_1.$$

Подставим (4.30) в выражения (4.28), (4.29). Получим

$$I_{1c} = E/(2R_1), \quad (4.31)$$

$$I_{2c} = E/(2\sqrt{R_1 R_2}) . \quad (4.32)$$

Таким образом, максимальное значение амплитуды тока во втором контуре достигается при основном резонансе ($\omega = \omega_p$) при оптимальном коэффициенте связи, либо при сложном резонансе при $k > k_{кр}$ на частотах связи $\omega = \omega_I$ или $\omega = \omega_{II}$.

4.5. Частотные характеристики системы связанных контуров

Рассмотрим частотные свойства тока первого и второго контуров в системе связанных контуров.

Комплексные сопротивления одиночных контуров могут быть записаны в виде (4.9). Эквивалентное сопротивление системы связанных контуров для схемы замещения рис.14,б есть

$$Z_{\Sigma 1} = Z_1 + Z_{вн1} . \quad (4.33)$$

Рассматриваем случай $Q_1 = Q_2 = Q$. Выразим $Z_{вн1}$, используя (4.9) и (4.19). Получим

$$Z_{вн1} = -Z_0^2/Z_2 = X_0^2/[R_2(1 + ja_2)] = (kQ)^2 R_1/(1 + ja_2). \quad (4.34)$$

Подставим (4.34) и Z_1 из (4.9) в (4.33). Получим

$$Z_{э1} = R_1[1 - a_1a_2 + j(a_1 + a_2) + (kQ)^2]/(1 + ja_2). \quad (4.35)$$

Запишем комплексные амплитуды токов учитывая (4.34)

$$\dot{I}_1 = E/Z_{э1} = (E/R_1)(1 + ja_2)/[1 - a_1a_2 + j(a_1 + a_2) + (kQ)^2]; \quad (4.36)$$

$$\dot{I}_2 = (E/Z_{э1})(Z_0/Z_2) = (E/\sqrt{R_1R_2})(\pm jkQ)/[1 - a_1a_2 + j(a_1 + a_2) + (kQ)^2].$$

На основании формул (4.36) получим амплитуды и фазы первого и второго контуров в виде

$$I_1 = (E/R_1)\sqrt{1 + a_2^2} / \sqrt{[1 - a_1a_2 + (kQ)^2]^2 + (a_1 + a_2)^2};$$

$$\psi_{i1} = -\arctg\{(a_1 + a_2)/[1 - a_1a_2 + (kQ)^2]\} + \arctg a_2. \quad (4.37)$$

$$I_2 = (E/\sqrt{R_1R_2})kQ / \sqrt{[1 - a_1a_2 + (kQ)^2]^2 + (a_1 + a_2)^2};$$

$$\psi_{i2} = -\arctg\{(a_1 + a_2)/[1 - a_1a_2 + (kQ)^2]\} \pm \pi/2. \quad (4.38)$$

Так же, как и в случае одиночного контура, для системы связанных контуров фазовая характеристика однозначно связана с амплитудой. Рассмотрим нормированную АЧХ токов при $\omega_{p1} = \omega_{p2} = \omega_p$, т.е. $a_1 = a_2 = a$.

$$n_1 = 2\sqrt{1 + a^2} / \sqrt{[1 - a^2 + (kQ)^2]^2 + 4a^2}; \quad (4.39)$$

$$n_2 = 2kQ / \sqrt{[1 - a^2 + (kQ)^2]^2 + 4a^2}. \quad (4.40)$$

Эти характеристики построены на рис.18 при различных значениях kQ .

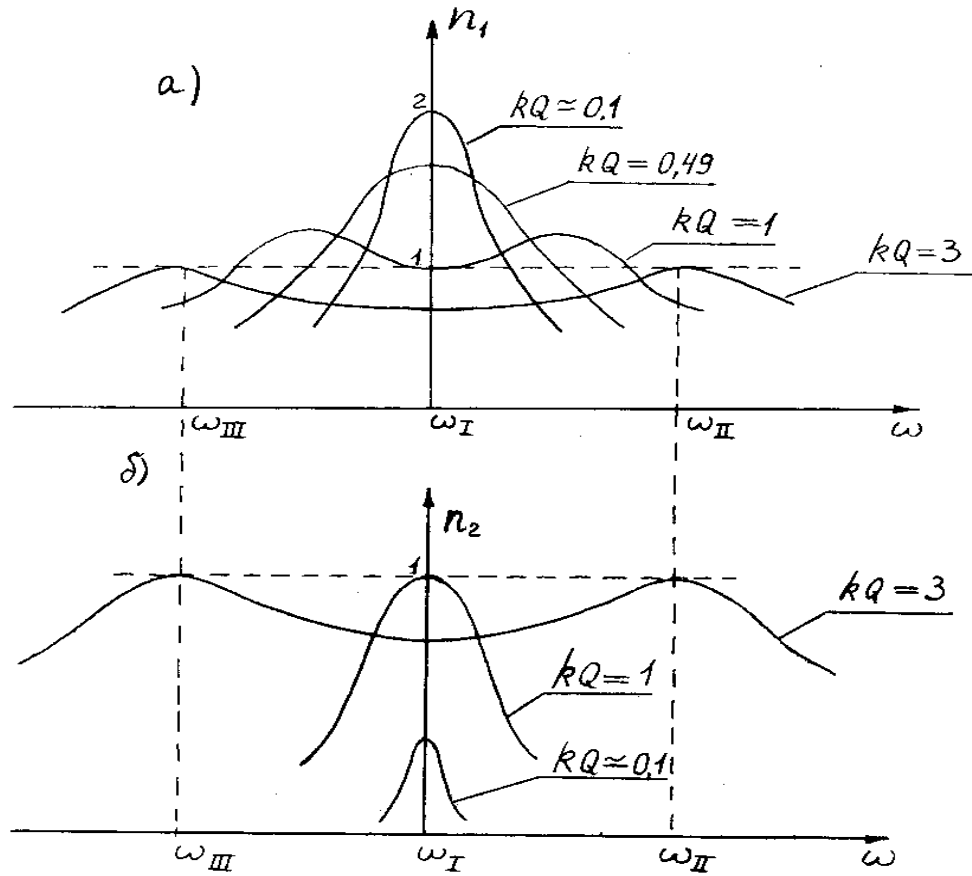


Рис 18

Из рассмотрения этих графиков видно, что с увеличением коэффициента связи характеристики $n_1(\omega)$ и $n_2(\omega)$ приобретают вид "двугорбых" с тремя экстремумами. Определим значения коэффициентов связи, при которых токи в первом и втором контурах достигают экстремума на частоте $\omega = \omega_p$. Это можно сделать, решая уравнения

$$dn_1/d(kQ) = 0, \quad dn_2/d(kQ) = 0.$$

Приведем результаты решения этих уравнений без вывода. Характеристика $n_1(\omega)$ имеет максимальное значение на частоте $\omega = \omega_p$ при $k \leq k_{кр1} = 0,49$. Характеристика $n_2(\omega)$ имеет максимум на частоте $\omega = \omega_p$ при $k \leq k_{кр2} = d$. Критический коэффициент связи второго контура $k_{кр2}$

совпадает с оптимальным коэффициентом связи $k_{\text{опт}} = d$ (для одинаковых контуров).

4.6. Полоса пропускания системы связанных контуров

Выходное напряжение системы связанных контуров снимают с элементов второго контура, поэтому частотные свойства системы связанных контуров в большей степени зависят от АЧХ и ФЧХ второго контура. Будем оценивать полосу пропускания системы связанных контуров по характеристике n_2 .

Рассмотрим три случая $kQ \ll 1$, $k_{\text{кр}}Q = 1$, $kQ > 1$. В первом случае характеристика n_2 на основании (4.40) имеет вид

$$n_2 = 2kQ/(1 + a^2).$$

При резонансе $n_2 = 2kQ$, на границе полосы пропускания $n_2 = 2kQ/\sqrt{2}$. Получим обобщенную расстройку, соответствующую полосе пропускания $a_0 = 0,64$. Используя соотношение (2.21), получим относительную полосу пропускания в виде

$$2\Delta\omega_0/\omega_p = 0.64d. \quad (4.41)$$

При малых значениях коэффициента связи ($kQ \ll 1$) полоса пропускания системы связанных контуров меньше, чем полоса пропускания одиночного контура (2.35). Аналогичным образом по характеристике n_2 получим значение полосы пропускания при $k = k_{\text{кр}} = 1/Q$

$$2\Delta\omega_0/\omega_p = 1,41d. \quad (4.42)$$

Полоса пропускания системы связанных контуров при $k = k_{\text{кр}}$ в 1,41 раза больше полосы пропускания одиночного контура.

Согласно рис.18 с дальнейшим увеличением коэффициента связи полоса пропускания возрастает. Вследствие уменьшения n_2 на частоте основного резонанса при возрастании коэффициента связи может возникнуть нежелательное явление, когда $n_2(\omega_p) < 1/\sqrt{2}$.

Определим из (4.40) предельное значение $k > k_{\text{кр}}$, необходимое для формирования частотной характеристики, у которой $n_2(\omega_p) = 1/\sqrt{2}$. Величина $k_{\text{пред}} = 2,41d$ (рис.19).

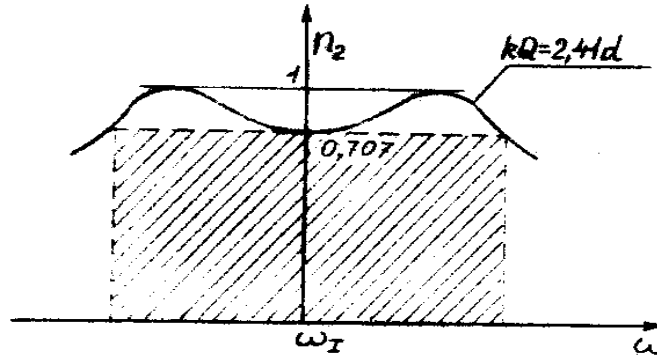


Рис 19

В этом случае максимальное значение полосы пропускания равно

$$2\Delta\omega_0/\omega_p = 3,1d. \quad (4.43)$$

Полоса пропускания системы связанных контуров для предельной связи в 3,1 раза больше полосы пропускания одиночного контура.

Из соотношений (4.40) можно получить аналитическую формулу, позволяющую определить значение обобщенной расстройки, соответствующей граничной частоте,

$$a_0 = \pm \sqrt{(kQ)^2 - 1 + \sqrt{2(1 + k^4 Q^4)}} \quad \text{при } k < k_{кр}; \quad (4.44)$$

$$a_0 = \pm \sqrt{(kQ)^2 - 1 \pm 2kQ} \quad \text{при } k > k_{кр}. \quad (4.45)$$

Свойство связанных контуров менять полосу пропускания при неизменной добротности входящих в систему контуров используется в радиотехнических системах при создании фильтров с сосредоточенной селекцией. Существенным преимуществом системы связанных контуров по сравнению с одиночными контурами является форма АЧХ и ФЧХ. Фильтры на основе связанных контуров имеют АЧХ и ФЧХ, близкие по форме к идеальным, П-образной и линейной форме (рис.1), соответственно.

Вопросы для самопроверки.

1. Приведите пример конкретной схемы системы двух связанных контуров с внутренней связью, обобщенную схему для схем с внутренней связью и схему замещения для них.
2. То же, что в п.1, но для схем с внешней связью.
3. Постройте графики зависимости сопротивлений, входящих в схемы замещения (для схем с внутренней и внешней связью), от обобщенной расстройки.
4. Определите понятия оптимального и критического коэффициентов связи.
5. Определите виды резонансов в системе связанных контуров и значения резонансных частот.
6. Укажите особенности АЧХ токов первого и второго контуров системы двух связанных контуров.
7. Сформулируйте особенности АЧХ и полосы пропускания второго контура в системе связанных контуров по сравнению с АЧХ и полосой пропускания одиночного последовательного контура.

Задача

Гармоническое воздействие амплитудой 1В подано на вход системы двух одинаковых связанных контуров, имеющих $L=20\text{мкГн}$, $C=20\text{пф}$, добротность $Q = 100$, коэффициент связи $k = 0,02$. Определить основную резонансную частоту ω_p , частоты связи ω_I, ω_{II} и значения токов на всех трех резонансных частотах.

Решение

$$1. \omega_{p1} = \omega_{p2} = 1/\sqrt{LC} = 5 \times 10^7 \text{ рад/с},$$

$$\omega_{I,II} = \omega_p / \sqrt{1 \pm \sqrt{k^2 - d^2}} = 5 \times 10^7 / \sqrt{1 \pm (4 \times 10^{-4} - 1 \times 10^{-4})} \approx \\ \approx 5 \times 10^7 [1 \pm (1,73/2) 10^{-2}] \text{ рад/с},$$

$$\omega_I = 50,4325 \times 10^6 \text{ рад/с}, \quad \omega_{II} = 49,5675 \times 10^6 \text{ рад/с}.$$

2. Ток первого контура на частоте $\omega = \omega_p$

$$I_{Ip} = E / \{R[1 + (kQ)^2]\}, \text{ где } R = \rho/Q = 10 \text{ Ом}.$$

$$I_{Ip} = 1/[10(1+2^2)] = 20 \text{ мА}.$$

3. Ток второго контура на частоте основного резонанса

$$I_{2p} = I_{1p} kQ = 20 \times 0,02 \times 100 = 40 \text{ мА.}$$

4. Токи контуров на частотах связи

$$I_2(\omega_{I,II}) = I_1(\omega_p, kQ = 1) = E/[R(1+1)] = 1/(10 \times 2) = 50 \text{ мА.}$$

Литература

1. Новгородцев А.Б. 30 лекций по теории электрических цепей: Учебник для ВУЗов. – СПб: Политехника, 1995. - 519 с.
2. Савина Н.А., Мегрецкая И.И., Козлов А.Н. Основы теории цепей: Учебн. пособие. Ч. 1 - Л. : СЗПИ, 1974. – 267 с.
3. Лосев А.К. Теория линейных электрических цепей. - М.: Высшая школа, 1987. – 511с.
4. Козлов А.Н., Краснов А.Г., Ланде Б.Ш. Связанные колебательные контуры и фильтры : Учебн. пособие. – Л.: СЗПИ, 1978. – 79 с.

Содержание	стр.
Лекция 1.....	3
Свободные колебания в одиночном контуре	
Введение.....	3
1.1.Свободные колебания в одиночном контуре и их связь с собственными функциями колебательной системы.....	4
Вопросы для самопроверки.....	12
Задача.....	12
Лекция 2.....	14
Последовательный колебательный контур при гармоническом воздействии	
2.1.Резонанс в последовательном колебательном контуре.....	14
2.2.Энергетические соотношения в последовательном контуре при резонансе.....	17
2.3.Частотные свойства входного сопротивления и тока конту- ра.....	18
2.4.Частотные характеристики коэффициента передачи.....	21
2.5.Понятие полосы пропускания контура.....	24
Вопросы для самопроверки.....	26
Задача.....	26
Лекция 3.....	28
Параллельный колебательный контур при гармоническом воздействии	
3.1. Резонанс в параллельном колебательном контуре.....	28
3.2. Виды параллельных колебательных контуров.....	31
3.3. Резонансные характеристики параллельного колебательного контура.....	33
3.4. Влияние внутреннего сопротивления генератора на свойства параллельного колебательного контура.....	36
Вопросы для самопроверки.....	38
Задача.....	38
Лекция 4.....	40
Системы связанных колебательных контуров	
4.1.Общие сведения.....	40

4.2.Схемы замещения для системы связанных контуров с внутренней связью.....	43
4.3.Резонансы в системе связанных колебательных контуров.....	45
4.4. Энергетические соотношения при резонансе.....	48
4.5.Частотные характеристики системы связанных контуров.....	51
4.6.Полоса пропускания системы связанных контуров.....	54
Вопросы для самопроверки.....	56
Задача.....	56
Литература.....	58

ЛР 020308 от 14.02.97.

Редактор М.Ю. Комарова

Подписано в печать

Формат 60х84 1/16.

Б. кн.-журн. П.л. 3.75 Б.л. 1.875 РТП РИО СЗПИ.

Тираж 200 Заказ.

Редакционно-издательский отдел
Северо-Западный заочный политехнический институт
191186, Санкт-Петербург, ул. Миллионная, 5